SHOUT
SHARE
IT

S. 1142. A.

MEMORIE
DI MATEMATICA E DI FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE

TOMO X. PARTE II.

MODENA
PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA
MDCCCIII.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

LETTERA

DI PIETRO ABBATI MODENESE

Al Socio

Paolo Ruffini

Da questo

Presentata il dì 16. Decembre 1802.

Per formarmi un' idea distinta di ciò che à rapporto al grado d' uguaglianza nella (Z) $f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) \,.\,.\,.\,.\,.\, (x)^{(m)}$ supposta invariabile ad una data permutazione, ho profittato del vostro suggerimento leggendo la Teoria delle Equazioni, e dal §.° 98. sono sbalzato al 256. e seguenti fino al 272. inclusive, ove ò rimarcato essere tutto diretto al principal fine di dimostrare, che qualunque siasi la funzione razionale
(Z) $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$
non potrà mai avere tanti valori uguali, che il numero dei disuguali rimanga minor di cinque, e maggior di due.

Quanto alla dimostrazione che date dell' indicato Teorema, ella è giustissima; ciò non ostante voglio comunicarvi alcune riflessioni dirette a semplificarla, e renderla generale per una qualunque funzion razionale delle radici di un' Equazione del grado *mesimo*: le troverete quì sotto disposte alla meglio in un certo tal qual ordine.

Intendo costantemente espressa con la lettera (Z) una funzione razionale delle *m* radici di un' Equazione del grado *mesimo* indicata mediante la forma
(Z) $f(x')(x'')(x''') \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (x^{(m)})$
e con la lettera (z) una funzione delle radici di un' Equazione di un dato grado.

1. Osservo, che se in una qualunque funzione (Z) si faccia il passaggio dalla generale espressione da cui viene indicata all' espressione concreta della medesima, sempre in ogni caso particolare si rileverà un *modo di combinazione* mediante il quale una radice si unisce alle altre; così un altro modo di combinazione con cui una diversa radice trovasi unita alle altre; così ec.

Sia per esempio la funzione

$$(z) \quad f(x')(x'')(x''') = \frac{x'}{x''} - x'''$$

nell' esposta particolare, e concreta espressione della (z) si vede il modo di combinazione con cui la radice x' si unisce alle altre due x'', x'''; il modo di combinazione con cui la radice x'' trovasi unita alle due x', x'''; e finalmente il modo di combinazione con cui la radice x''' si unisce alle altre x', x''.

2. Quando si dice che la funzione (Z) è tale per la forma, che due o più risultati nati da una data permutazione fra le radici x', x'', x''', $x^{\prime v}$, ec. $x^{(m)}$ sono uguali, si intende, che il *modo di combinazione* con cui si uniscono le citate radici nella concreta espressione della funzione è tale, che permutandole a tenore della nominata permutazione, i risultati che ne provengono sono identici.

Per esempio essendo la

$$(z) \quad f(x')(x'')(x''') = x'x'' - x''',$$

nella quale, permutando la x' reciprocamente con la x'', si ottiene il risultato

$$x''x' - x''' = x'x'' - x''',$$

si intende che il modo di combinazione delle radici x', x'', x''' nella concreta espressione della funzione è tale, che praticando la riferita permutazione i risultati che ne provengono sono identici.

3. Due cose si devono dunque considerare in una qualunque funzione (Z). Primo le m radici dell' Equazione del

grado *mesimo* . Secondo *i modi di combinazione* con cui le une si uniscono alle altre nella concreta espressione della (Z).

4. Si comprenderà facilmente, che permutando in tutte le maniere possibili le m radici fra loro nella generale espressione della (Z) si otterrà un numero $\pi = 1 . 2 . 3 . . . . m$ di forme diverse, le quali saranno capaci di significare tutti i valori generalmente diversi della (Z), qualora concepiti in astratto i varii modi di combinazione con cui le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ trovansi unite nella concreta espressione di un parziale valore della funzione, vengano col pensiero fissati costanti relativamente ai posti, o caselle occupate dalle stesse radici nella surriferita espressione della (Z); onde al permutarsi di queste nelle π forme indicate sempre rimanga costante il rispettivo modo di combinazione con cui si uniscon fra loro la *prima*, *seconda*, ec. *mesima*, cioè le radici, qualunque sieno, collocate alla prima, seconda, ec. mesima casella.

Volendo per esempio esprimere generalmente i sei valori della funzione (z), $f\,(x')\,(x'')\,(x''')$
permutando le x', x'', x''' sotto il segno f onde avere
1.° $f\,(x')\,(x'')\,(x''')$, 2.° $f\,(x'')\,(x''')\,(x')$, 3.° $f\,(x''')\,(x')\,(x'')$,
4.° $f\,(x'')\,(x')\,(x''')$, 5.° $f\,(x')\,(x''')\,(x'')$, 6.° $f\,(x''')\,(x'')\,(x')$,
sarà necessario di fissare costante alla prima casella sotto il segno f il modo di combinazione, con cui la radice x' trovasi unita alle due x'', x''' nella concreta espressione di un dato valore della (z); così alla seconda casella fissare il modo di combinazione con cui la radice x'' trovasi unita alle due x', x''' nell' espressione del suddetto valore; ec. dunque essendo il primo valore della (z)
1.° $f\,(x')\,(x'')\,(x''') = x'\,x'' - x'''$
sarà per conseguenza
2.° $f\,(x'')\,(x''')\,(x') = x''\,x''' - x'$, 3.° $f\,(x''')\,(x')\,(x'') =$
$x'''\,x' - x''$, 4.° $f\,(x'')\,(x')\,(x''') = x''\,x' - x'''$, ec.

5. Nel num. precedente, e nei susseguenti chiamo

prima, seconda ec., casella, quella che rispettivamente trovasi prima, seconda, ec. partendosi dal segno f andando a destra.

6. Si deduce dal (n.° 4.)

1.° Che data la (Z) tale per la forma che siano uguali due valori espressi dalle forme (A′), (A″) delle π indicate al (n.° 4); in tal caso notati i posti, o caselle donde partono, e quelle ove vanno a fermarsi le radici che si movono passando da (A′) ad (A″), e dato il nome di *permutàzione* al risultato di tale osservazione, un qualunque altro valore della (Z) espresso da (B′) sarà eguale ad un valore espresso da (B″), se (B″) nasca da (B′) mediante la stessa permutazione con cui (A″) si forma da (A′): ossia saranno (A′) = (A″), (B′) = (B″), (per la supposizione e pel n.° 4) se in (A′), (B′) si moveranno in egual maniera le radici collocate rispettivamente alla prima, seconda, ec. *mesima* casella onde formare i corrispondenti valori (A″), (B″).

Per esempio essendo

$$(A')\quad f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})(x^{v\prime})\ldots\ldots\ldots\ldots(x^{(m)}) =$$

$$(A'')\quad f(x''')(x'^{v})(x'')(x')(x^{v})(x^{v\prime})\ldots\ldots\ldots\ldots(x^{(m)})$$

sarà

$$(B')\quad f(x'')(x'^{v})(x')(x''')(x^{v})(x^{v\prime})\ldots\ldots\ldots\ldots(x^{(m)}) =$$

$$(B'')\quad f(x')(x''')(x'^{v})(x'')(x^{v})(x^{v\prime})\ldots\ldots\ldots\ldots(x^{(m)}).$$

2.° Che nella precedente supposizione la (Z) avrà tanti valori uguali quante forme diverse si ottengono rinnovando sopra (A″) la permutazione che scorgesi fra (A′) ed (A″), e continuando l' operazione finchè ritorni la prima forma (A′).

Per esempio: data essendo la

$$(z)\ f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$$

tale per la forma che sia

$$(A')\,f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}) = (A'')\,f(x''')(x')(x'^{v})(x^{v})(x'')$$

saranno uguali i cinque valori

(A′)

$(A')\ f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $(A'')\ f(x''')(x')(x'^{v})(x^{v})(x'')$,
$(A''')\ f(x'^{v})(x''')(x^{v})(x'')(x')$, $(A^{v})\ f(x^{v})(x'^{v})(x'')(x')(x''')$,
$(A^{v})\ f(x'')(x^{v})(x')(x''')(x'^{v})$.

Così se per la forma della
$(z)\ f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})(x^{v'})$
siano uguali i due valori
$f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})(x^{v'}) = f(x'')(x'^{v})(x^{v})(x^{v'})(x')(x'')$
ve ne sarà un terzo
$f(x^{v})(x^{v'})(x')(x'')(x''')(x'^{v})$
uguale ai due precedenti .

3.° Finalmente se la (Z) sia tale per la forma che si uguaglino fra loro i valori (A') , (A'') , (A''') , ec. espressi generalmente come al (n.° 4) ; in tal caso notate tutte le permutazioni che scorgonsi paragonandoli due a due , e praticate nel modo indicato al (2.° precedente) sopra ciascheduno , si otterrà un numero μ di valori della (Z), che chiamerò (A') , (A'') , A''') , ec. $(A^{(\mu)})$, i quali saranno tutti uguali fra loro ; continuando a notare tutte le permutazioni che scorgonsi paragonando due a due gli anzidetti μ valori , e ad eseguirle sopra ciascheduno nel citato modo del (2.° precedente) ec. ; continuando ec., si giungerà finalmente ad ottenere un numero p di valori della data (Z) , che chiamerò
(A') , (A'') , (A''') , ... $(A^{(p)})$
tutti uguali fra loro , e tali che notate le permutazioni che si incontrano paragonandoli due a due , e poscia eseguite sempre nel modo indicato sopra ciascheduno , mai si genererà un valore , il quale non sia compreso fra i medesimi .

7. Il numero p del (3.° n.° precedente) chiamasi *grado d' uguaglianza* della funzione , giacchè la medesima pel (§. 98 Teor. Equazioni) aver deve tutti i suoi valori uguali a p , a p ; (1); le permutazioni poi che si incontrano fra i ri-

---

(1) *Dietro i principii stabiliti si potrebbe dimostrare il Teorema dei* (§§. 97 , 98 *Teoria Equazioni*) *nel modo se-*

risultati (A'), (A''), (A'''), ... $(A^{(p)})$ paragonati due a due trovansi mirabilmente riunite in una sola idea di permu-

---

guente. Espressi i π valori della (Z) mediante le π forme ossia generali valori indicati al (n.° 4); siano i p valori del (3.° n.° 6) (A'), (A''), (A'''), . . . $A^{(\mu)}$ . . . $(A^{(\nu)})$ . . . $A^{(p)}$; *in tal caso preso un valore fra i rimanenti π — p della* (Z), *e denominato* (B') *se ne otterranno altrettanti*

(B'), (B''), (B'''), . . . $(B^{(\mu)})$ . . . $(B^{(\nu)})$ . . . . . B^{p},

se rispettivamente si eseguiscano sopra (B') *le varie permutazioni che scorgonsi nei* (p — 1) *paragoni di* (A') *agli altri* (p — 1) *valori* (A''), (A''') *ec.*, $(A^{(p)})$; *Così preso uno dei rimanenti π — 2p valori della* (Z) *e denominato* (C') *si otterrà nello stesso modo un numero p di valori*

(C'), (C''), (C''') . . . . . . $(C^{(\mu)})$ . . . . . $(C^{(\nu)})$ . . . . $(C^{(p)})$

Così preso ec. ec. Ciò posto io dico

1.° *Che paragonando fra loro due forme qualunque prese dalle p* (A'), (A''), *ec.* $(A^{(p)})$, *ossia generalmente le forme* $(A^{(\mu)})$, $(A^{(\nu)})$, *si incontrerà una permutazione uguale a quella che scorgesi nel paragone delle due corrispondenti forme* $(B^{(\mu)})$, $(B^{(\nu)})$; *ed eccone la ragione. Stante l' idea delle permutazioni formata al* (1.° *n.°* 6) *volendo dalla forma* (A') *generar l' altra* $(A^{(\nu)})$ *si può considerare, che la radice collocata alla prima casella in* (A') *si porti alla casella λ in* $(A^{(\mu)})$, *e dalla casella λ alla casella ω in* $(A^{(\nu)})$; *lo stesso dicasi di tutte le radici collocate alle rimanenti* (m — 1) *caselle in* (A'); *cioè si può considerare che il movimento ossia permutazione delle radici fra* (A') *ed* $(A^{(\nu)})$ *sia composto dei movimenti delle radici fra* (A') *ed* $(A^{(\mu)})$, $(A^{(\mu)})$ *ed* $(A^{(\nu)})$; *un simile discorso si faccia della permutazione fra* (B'), *e* $(B^{(\nu)})$. *Ma le permutazioni fra* (A'), *ed* $(A^{(\nu)})$, (B), *e* $(B^{(\nu)})$

mutazione mediante le distinzioni, che si fanno ai (§§. 256, 257, 258, 259 citata Teoria Equazioni).

8.

---

sono uguali, come pure lo sono quelle di (A'), *ad* $(A^{(\mu)})$, (B') *a* $(B^{(\mu)})$ (*per la supposizione, o costruzione delle forme* (B''), (B''') *ec.*) *dunque paragonando* $(A^{(\mu)})$, $(B^{(\mu)})$ *rispettivamente ad* $(A^{(\nu)})$, $(B^{(\nu)})$ *si rileverà un egual movimento nelle radici similmente poste nelle due date forme* $(A^{(\mu)})$, $(B^{(\mu)})$ *e però ec.*

2.° *Che una qualunque forma* $(B^{(\mu)})$ *non può essere identica ad un' altra qualunque* $(B^{(\nu)})$ *; giacchè le forme* (A''), (A'''), *ec.*, $(A^{(p)})$ *sono diverse, e quindi le due forme* $(B^{(\mu)})$, $(B^{(\nu)})$ *nascono da permutazioni diverse eseguite sulla medesima forma* (B').

3.° *Che una qualunque forma* $(B^{(\mu)})$ *non può essere identica ad un altra qualunque* $(A^{(\nu)})$*; mentre ciò essendo e praticando in amendue la stessa permutazione, si dovrebbe generare una medesima forma, e però la forma* $(A^{(\nu)})$ *genererebbe l' altra* (B'), *praticando sopra* $(A^{(\nu)})$ *la permutazione che passa fra* $(B^{(\mu)})$ *e* (B') *ossia* $(A^{(\mu)})$ *ed* (A')*; ma pel* (3.° *n.°* 6) *la forma in tal modo generata da* $(A^{(\nu)})$ *deve essere compresa nelle p forme* (A'), (A''), *ec.* $(A^{(p)})$, *dunque* (B') *contro l' ipotesi verrebbe compresa nelle suddette p forme, e però ec.*

4.° *Che il numero delle forme* (B'), (B''), *ec. deve essere precisamente uguale a quello delle* (A'), (A''), *ec.* $(A^{(p)})$, *mentre se si volesse che una forma* $(B^{(p+1)})$ *nascesse da* $(B^{(\omega)})$ *mediante la permutazione che scorgesi fra le due* $(B^{(\mu)})$, $(B^{(\nu)})$, *io osservo che nelle p forme* (A'), (A'') *ec. ve ne sarà pel* (3.° *n.°* 6) *una* $(A^{(0)})$ *nata da* $(A^{(\omega)})$ *mediante la permu-*

8. Per dimostrare il Teorema, che forma il soggetto principale delle presenti riflessioni, esporrò un metodo onde conoscere speditamente in certi casi particolari, in cui dati sieno alcuni valori uguali per la forma della (Z), il minimo nu-

---

tazione che scorgesi fra ($A^{(\mu)}$) *ed* ($A^{(\nu)}$), *ossia pel* (1.° *precedente*) *fra* ($B^{(\mu)}$) *e* ($B^{(\nu)}$); *ma per la supposizione o costruzione delle forme* (B''), (B'''). *ec.*, ($B^{(p)}$) *vi sarà una forma* ($B^{(o)}$) *la quale paragonata a* ($B^{(\omega)}$) *pel* (1.° *precedente*) *ci darà la stessa permutazione che scorgesi fra* ($A^{(\iota)}$) *ed* ($A^{(\omega)}$), *dunque* ($B^{(\epsilon)}$) *nascerà da* ($B^{(\omega)}$) *mediante la permutazione che passa fra* ($B^{(\mu)}$) *e* ($B^{(\nu)}$), *e quindi la supposta* ($B^{(p+1)}$) *sarà precisamente una delle* p *forme* (B'), (B''), *ec.* ($B^{(p)}$), *mentre sarà identica alla* ($B^{(o)}$).

5.° *Che il discorso fatto delle forme* (B'), (B''), *ec. si può applicare alle* (C'), (C''), *ec.* ($C^{(p)}$); (D'), (D''), *ec.* $D^{(p)}$; *ec. confrontate tanto alle* (A'), (A''), *ec.* ($A^{(p)}$) *quanto alle* (B'), (B'') *ec.* ($B^{(p)}$), *ec. ec. Dunque il numero* π, *che ci esprime quello delle forme diverse con cui si possono rappresentare* (*n.°* 4) *i* π *valori generalmente diversi della* (Z) *sarà sempre esattamente divisibile pel grado d' uguaglianza* p. *Supposto dunque, che stante il modo di combinazione con cui le radici* x', x'', x''' . . . $x^{(m)}$ *si uniscono nella concreta espressione di un parziale valore della* (Z) *divengano fra loro uguali i* p *valori della medesima espressi dalle forme del* (3.° *n.°* 6.)

(A'), (A'') . . . . ($A^{(p)}$)

facilmente si vedrà pei (*Numeri* 4 *e* 6), *che saranno fra loro uguali gli altri valori della* (Z) *indicati rispettivamente dalle forme* numero capace di rappresentare il grado d'uguaglianza p; poscia fisserò l'attenzione sopra i valori, che necessariamente dovranno uguagliarsi, qualora una funzione delle radici di un'Equazione di un grado superiore al quarto debba esser tale per la forma che il numero dei suoi valori disuguali resti minor di cinque; finalmente con l'applicazione del metodo superiormente indicato farò vedere, che nella circostanza indicata il grado d'uguaglianza p mai sarà minore di $1.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ m$, e che però la funzione avrà al più due valori disuguali.

9. Preso un qualunque risultato della (Z) per es.

1.° $f(x')(x'')(x''')\ \ldots\ldots\ (x^{(m)})$

ed avanzando d' una casella rispettivamente tutte le radici a riserva della prima, la quale venghi perciò trasportata alla *mesima*, e continuando l' operazione, si otterranno m risultati generalmente diversi della (Z), dopo i quali, continuando l' operazione si replicherà il primo, e di mano in mano gli altri: tali risultati saranno.

1° $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})\ldots(x^{(m)})$, 2° $f(x'')(x''')(x^{iv})\ldots(x^{(m)})(x')$,
3° $f(x''')(x^{iv})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (x^{(m)})(x')(x'')$
4° $f(x^{iv})\ \ldots\ldots\ (x^{(m)})(x')(x'')(x''')$, ...
mesimo, $f(x^{(m)})(x')(x'')(x''')(x^{iv})\ \ldots\ldots\ (x^{(m-1)})$

ove si vede, che mai si trova in due qualunque dei medesimi una stessa radice al medesimo posto, o casella, e che per-

---

(B'), (B''), ... $B^{(p)}$
(C'), (C''), ... $C^{(p)}$
(D'), (D''), ... $(D^{(p)})$
ec. ec. ec. ec. ec.

e che per conseguenza la (Z) avrà i suoi valori uguali a p, a p ed un numero $\frac{\pi}{p}$ *di valori disuguali.*

perciò essendo (P) , (Q) due degli m risultati ottenuti nel modo superiormente indicato , la radice collocata in (Q) alla casella (λ') si troverà in (P) ad una casella (λ) fra le rimanenti ($m - 1$) .

10. Dall' inspezione degli m valori del (n.° precedente) e dal (2. n.° 6.°) si vedrà

1.° Che se per la forma della (Z), dei riferiti m valori sia il 1.° = 2.° , oppure = *mesimo* , o finalmente se ne uguaglino due successivi ; in tal caso saranno pure fra loro uguali tutti gli m valori suddetti .

2.° Che essendo il 1.° = 3.° , se m sarà un numero *pari* gli indicati valori s' uguaglieranno ad $\frac{m}{2}$ ad $\frac{m}{2}$, ed essendo m numero *dispari* s' uguaglieranno tutti fra loro .

11. Dunque , essendo $m = 3$, se de' tre valori

$f(x')\,(x'')\,(x''')$, $f(x'')\,(x''')\,(x')$, $f(x''')\,(x')\,(x'')$

ottenuti nel modo indicato al (n.° 9) due sono uguali , lo saranno tutti e tre .

12. Confrontando due a due i cinque valori della

(z) $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\text{iv}})\,(x^{\text{v}})$

ottenuti nel modo del (n.° 9), si conclude che saranno uguali tutti e cinque , se la (z) sia tale per la forma che due qualunque dei medesimi siano uguali (2. n.° 6.°) . (2)

13.

---

(2) *Un discorso simile si può generalmente fare dei cinque valori della (z) ottenuti mediante una qualunque permutazione semplice di primo genere fra tutte e cinque le* x' , x'' , *ec.* x^{v} (*numeri* 257 , 262 *Teoria Equazioni*) ; *se ne può vedere un esempio confrontando due a due i cinque valori* (A'), (A''), *ec.* (A$^{\text{v}}$) *indicati al* (2 *n.*° 6°) *e si può , volendo , verificare la cosa in tutta la sua estensione uguagliando di mano in mano il risultato*

(A') $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\text{iv}})\,(x^{\text{v}})$

ad uno dei sei

13. Confrontando due a due i sei valori della

$(z) \quad f\,(x')\,(x'')\,(x''')$

indicati al (n.° 4.) si vedrà pei (n.° 6, 11) che sempre si avrà

$$(A')\, f\,(x')\,(x'')\,(x''') = (A'')\, f\,(x'')\,(x')\,(x''')$$

$$\text{oppure} = (A''')\, f\,(x')\,(x''')\,(x'')$$

$$\text{oppure} = (A^{v})\, f\,(x''')\,(x'')\,(x')$$

$$\text{o finalmente} = (A^{v})\, f\,(x'')\,(x''')\,(x')$$

in ogni caso che per la forma della (z) si uguaglino due qualunque dei suoi sei valori.

14. Il discorso fatto ai (numeri 11, 12, 13) può applicarsi in generale ai risultati di una qualunque (Z) nati dalle permutazioni di un numero di radici rispettivamente uguale, e nel modo indicato ai (medesimi numeri); ossia derivati da simili corrispondenti permutazioni; dunque se nella

$(z) \quad f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v})$

sia il risultato $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v}) = f\,(x''')\,(x'')\,(x'^{v})\,(x')\,(x^{v})$ saranno fra loro uguali i tre valori

$f\,(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}),\ f(x''')(x'')(x'^{v})(x')(x^{v}),\ f(x'^{v})(x'')(x')(x''')(x^{v})$.

E se la suddetta funzione (z) sia tale per la forma che due dei sei valori nati dalle sole permutazioni delle tre radici collocate alle prime tre caselle siano uguali, sarà sempre

$$(A')\, f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v}) = (A'')\, f\,(x'')\,(x')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v})$$

$$\text{oppure} = (A''')\, f\,(x')\,(x''')\,(x'')\,(x^{v})\,(x^{v})$$

$$\text{oppure} = (A'^{v})\, f\,(x''')\,(x'')\,(x')\,(x'^{v})\,(x^{v})$$

$$\text{o finalmente} = (A^{v})\, f\,(x'')\,(x''')\,(x')\,(x^{v})\,(x^{v})\,.$$

15. Supposto $m > 2$, e la funzione (Z) tale per la forma che il suo grado d'uguaglianza p sia almeno ugnale ad

---

$(A''1)\, f\,(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})(x')$, $(A''2)\, f(x'')(x'^{v})(x')(x^{v})(x''')$, $(A''3)\, f\,(x'')(x^{v})(x')(x''')(x'^{v})$ $(A''4)\, f\,(x'')(x''')(x^{v})$([illegible])([illegible]) $(A''5)\, f\,(x'')(x'^{v})(x^{v})(x''')(x')$, $(A''6)\, f\,(x'')(x^{v})(x'^{v})(x')(x''')$, e paragonando fra loro due a due i cinque valori, che nelle varie ipotesi si uguaglieranno in forza del cit.° (2. n.° 6).

1. 3. 4. . . . m, ossia che ella abbia due valori disuguali al più, io dico che la (Z) non cambierà valore alla permutazione di tre sole radici fra loro, simile alla già indicata (n.° 9).

La cosa è chiara, mentre dei tre valori della (Z) nati l' un dall' altro permutando tre sole radici nel modo indicato (n.° 9), due necessariamente dovranno uguagliarsi in forza della supposizione, e però tutti e tre (n.° precedente).

16. Data adunque la funzione (Z) tale per la forma come si è supposta al (n.° precedente): io dico

1.° Che un qualunque risultato della (Z) per es. (R') sarà uguale ad altri risultati (R''), (R'''), ec. nei quali una qualunque data fra le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ trovisi ad una data casella qualunque sotto il segno f: eccone la ragione. Permutando tre sole radici mediante la permutazione del (n.° 9) in un qualunque risultato della (Z) non si altera punto il suo valore (n.° precedente), e si possono generare i risultati (R'), (R''), ec. $(R^{(m)})$, nei quali rispettivamente le radici x', x'', x''', ec. x^{m} trovinsi alla prima casella; così i risultati $(R^{(m+1)})$, $(R^{(m+2)})$, ec. $(R^{(2m)})$ nei quali rispettivamente le x', x'', ec. $x^{(m)}$ trovinsi alla seconda casella; così ec. dunque ec.

2.° Che nel caso di m numero *dispari* sarà

$$(A')\,f(x')(x'')(x''')(x'^{v})\ldots(x^{(m)}) = (A'')\,f(x'')(x''')(x'^{v})\ldots(x^{(m)})(x')$$

e nel caso di m *pari* sarà

$$(A')\,f(x')(x'')(x'')(x'^{v})\ldots(x^{(m)}) = (A''')\,f(x''')(x'^{v})\ldots(x^{(m)})(x')(x'')$$

cioè sarà il 1° = 2° risultato del (n.° 9) se m sia *dispari*, e sarà il 1° = 3° risultato (n.° citato) se m sia *pari*; ed eccone la ragione. Pel (n.° precedente) sarà nel caso di m numero *dispari*.

$$(A')\,f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})\ldots(x^{(m)}) = f(x'')(x''')(x')(x'^{v})\ldots(x^{(m)}) =$$
$$f(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})(x')(x^{v'})\ldots(x^{(m)} = \cdots = f(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})\ldots(x'^{m})(x');$$

e per lo stesso (n.° preced.) sarà nel caso di m numero *pari*

(A')

$$(A')\, f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v}) \ldots (x^{(m)}) = f(x')(x''')(x^{\prime v})(x'')(x^{v}) \ldots (x^{(m)}) =$$
$$f(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})(x'')(x^{v\prime\prime}) \ldots (x^{(m)}) = \ldots = f(x')(x''')(x^{\prime v}) \ldots$$
$$(x^{(m)})(x'') = f(x''')(x^{\prime v})(x')(x^{v}) \ldots (x^{(m)})(x'') =$$
$$f(x'')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime}(x')(x^{v\prime\prime}) \ldots\ldots\ldots (x^{(m)})(x'') = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= f(x''')(x^{\prime v}) \ldots\ldots\ldots (x^{(m)})(x')(x'').$$

17. Il discorso fatto ai (num. 15, 16) può applicarsi ai valori della (Z) nati dalle sole possibili permutazioni di n radici collocate in n caselle date, qualora la forma della (Z) si supponga tale, che fra questi il numero dei disuguali non sia mai maggiore di due.

18. Chiamo (R'), (R''), (R'''), ec. $(R^{(\nu)}$ un numero ν di valori della (Z) presi fra gli 1.2.3.....n nati dalla medesima permutando n radici $x^{(q)}$, $x^{(r)}$, ec. $x^{(\lambda)}$, ... $x^{(t)}$, ec. collocate alle date caselle (q), (r), ec. (λ) . . . (t), ec., e tali nel lor complesso che ognuna delle n date radici si trovi una volta almeno in ciascheduna delle n caselle date.

19. Se per la forma della (Z) siano uguali oltre ai ν valori del (numero precedente) due altri valori (P), (Q) tali, che passando dall' uno (P) all' altro (Q) una almeno delle n radici collocate in (P) alle caselle (q), (r), . . . (λ) . . . (t), ec. indicate al (cit. n.° preced.) si porti in (Q) ad una delle rimanenti $(m-n)$ caselle; io dico, in tal caso, che il grado d' uguaglianza p della (Z) non sarà mai minore di $\nu \times (n+1)$.

Qualunque sia la permutazione per cui dal risultato (P) si genera l' altro (Q), è evidente per la supposizione che generalmente parlando la radice collocata in (P) alla casella (λ) fra le n date, andrà a collocarsi in (Q) alla casella λ' fra le rimanenti $(m-n)$. Ora, per la supposizione del numero precedente, fra i ν valori (R'), (R'') ec. $(R^{(\nu)})$ ve ne sarà almeno un numero n che chiamerò

(R'), (R''), (R'''), . . . $(R^{(n)})$, nei quali rispettivamente alla casella (λ) si trovino le n radici $x^{(q)}$, $x^{(r)}$, $x^{(s)}$, . . . $x^{(\lambda)}$ . . . ec.

Dunque praticando negli indicati risultati (R'), (R'') ec. $(R^{(n)})$ la permutazione supposta fra i due risultati uguali (P), (Q), la (Z) avrà almeno $(n+1)$ valori uguali (R'), $(R'1)$, $(R'2)$, $(R'3)$, ... $(R'n)$ nei quali alle n date caselle prese in complesso mai si troverà la stessa combinazione di n date radici fra le m che compongono la funzione. Ma per la supposizione la (Z) è tale per la forma, che il risultato (R') ne uguaglia altri $(\nu-1)$ fra gli 1. 2. 3. . . . n nati permutando nel medesimo in tutte le maniere possibili le sole n radici collocate alle n date caselle (q), (r), ec. Dunque fra gli 1. 2. 3. . . . . n valori che nascono da ciascun risultato $(R'1)$, $(R'2)$, . . . $(R'n)$ permutando in tutte le maniere possibili le sole e rispettive radici collocate nei medesimi alle n date caselle (q), (r), ec. sempre un numero $(\nu-1)$ saranno corrispondentemente uguali ai detti risultati $(R'1)$, $(R'2)$, ec. $(R'n)$. Ora $(R') = (R'1) = (R'2) = \text{ec.} = (R'n)$. Dunque la (Z) avrà p valori uguali, e mai sarà $p < [(\nu-1)(n+1) + n+1]$; cioè p non sarà minore di $\nu \times (n+1)$. C. *d. d.*

20. Nelle supposizioni del (n.° precedente) se i due risultati (P), (Q) sono tali, che nel lor paragone si incontri un numero μ di radici ferme in altrettante caselle delle date $(m-n)$; in tal caso la (Z) avrà p valori uguali presi fra gli 1. 2. 3. . . . . . . $(m-\mu)$ nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate alle date $(m-\mu)$ caselle, e non sarà mai $p < \nu \times (n+1)$.

21. Dunque 1.° Se la funzione (Z) sia tale per la forma che si abbiano i valori $(A') = (A'')$, $(B') = (B'')$, e che paragonando (A') ad (A'') si trovino ferme $(m-2)$ radici in $(m-2)$ caselle, e paragonando (B') a (B'') si trovi smossa una radice da una delle precedenti $(m-2)$ caselle date, restando ferme nelle rimanenti $(m-3)$ altrettante date radici, in tal caso il grado p d' uguaglianza non sarà minore di 1. 2. 3.

2.° Se oltre ai precedenti valori della (Z) sia $(C') = (C'')$, e che e che paragonando (C′) a (C″) si trovi smossa una radice da una delle precedenti ($m - 3$) date caselle restando ferme nelle rimanenti ($m - 4$) altrettante date radici; in tal caso il grado d' uguaglianza p mai sarà minore di 1. 2. 3. 4.

3.° Se oltre alle precedenti copie di valori sia (D′) = (D″), e che paragonando (D′) a (D″) si trovi smossa una radice da una delle precedenti ($m - 4$) date caselle, e ferme nelle rimanenti ($m - 5$) altrettante date radici il grado p d' uguaglianza non sarà minore di 1. 2. 3. 4. 5.

4.° Continuando il discorso, e giungendo ai due valori uguali (N′) = (N″) nel cui paragone si incontri smossa una radice da una delle precedenti ($m - n + 1$) date caselle, e ferme nelle rimanenti ($m - n$) altrettante date radici; in tal caso il grado p d' uguaglianza non sarà minore di 1. 2. 3. . . . n; ed essendo $n = m$ la funzione (Z) avrà la forma (Z) $f\,(\,x', x'', x''', \ldots\ldots\ldots x^{(m)}\,)$.

22. Supposta la (Z) tale per la forma, che due nè più, nè meno siano i suoi valori disuguali; questi si potranno sempre esprimere con le due forme (M), (N), nate l' una dall' altra mediante la sola reciproca permutazione di due radici fra loro. (numeri 15, 21)

23. Data la (Z) tale per la forma che due al più siano i valori disuguali fra gli 1. 2. 3. . . . . ($m - 1$) nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate in ($m - 1$) caselle date; e che due valori (P), (Q) degli m ottenuti come al (n.° 9) siano uguali; io dico che in tal caso il grado d' uguaglianza p non sarà minore di 1. 3. 4. . . . ($m - 1$) (m); e che però la (Z) avrà al più due valori disuguali.

Questa è una chiara conseguenza dei (numeri 17, 9, 19) e del (§° 98 Teoria Equazioni, o nota (1) al n.° 7).

24. Premetto la considerazione che se una qualunque funzione (Z) aver deve un numero di valori disuguali <5, necessariamente di un numero uguale o maggiore di 5 de' suoi valori

tanti se ne dovranno uguagliare, che il numero dei disuguali sempre rimanga minor di cinque.

25. Dunque essendo la (Z) tale per la forma come si è supposta al (n.° precedente), ed essendo m uguale o maggiore di 5, dovranno uguagliarsi almeno due dei sei valori nati dalle sole possibili permutazioni delle tre radici collocate alle tre prime caselle, come pure dovranno uguagliarsi almeno due dei cinque, sei, sette, ec. risultati che rispettivamente si ottengono permutando le radici collocate alle prime cinque, sei, sette, ec. caselle nel modo indicato al (n.° 9)

26. La (Z), essendo m uguale, o maggiore di 5, non potrà esser tale per la forma che il numero de' suoi valori disuguali sia < 5, e > 2.

Dividerò la dimostrazione in due parti; prima allorchè sia $m = 5$; seconda allorchè $m > 5$.

Dim. 1.ª Parte. Sia $m = 5$, e però la
$(z)\ \ f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\text{iv}})\,(x^{\text{v}})$;
in tal caso costrutta l' annessa Tavola (T)

osservò, che se i valori disuguali della (z) devon essere meno di cinque, pei (num. 25, 12, 6) saranno rispettivamente uguali fra loro i cinque risultati collocati nella Tavola (T) alle file orizzontali (A), (A''), ec. (A$^{\text{v}}$); ma per lo stesso (n.° 25) e (n.° 14) il primo valore a sinistra della prima fila orizzontale della (Tav. T) deve uguagliarne uno almeno dei quattro collocati in primo posto a sinistra nelle quattro rimanenti file della Tavola stessa; dunque nel caso saranno almeno uguali dieci valori della (z) situati in due sole file orizzontali dell' indicata Tavola; cioè nella prima (A'), ed in una delle altre quattro rimanenti.

Se i valori alla fila (A') saranno uguali a quelli di una delle tre file (A''), (A'''), (A$^{\text{iv}}$), in ogni caso paragonando delle due date file i rispettivi primi valori fra loro, poscia i rispettivi secondi, ec., si vedrà che la (z) sarà una funzio-

(T)

$x^{\prime v})\,(x^{v})\,(x^{\prime}),\ f(x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\ )\ (x^{\prime})\,(x^{\prime\prime})\,(x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime v})$

$^{\prime v})\,(x^{v})\,(x^{\prime\prime}),\ f(x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\ )\ (x^{\prime\prime})\,(x^{\prime})\,(x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime v})$

$^{\prime v})\,(x^{v})\,(x^{\prime}),\ f(x^{\prime\prime})\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\ )\ (x^{\prime})\,(x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime\prime})\,(x^{\prime v})$

$^{\prime v})\,(x^{v})\,(x^{\prime\prime\prime}),\ f(x^{\prime})\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\ \ (x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime\prime})\,(x^{\prime})\,(x^{\prime v})$

$^{\prime v})\,(x^{v})\,(x^{\prime\prime}),\ f(x^{\prime})\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\ )\ (x^{\prime\prime})\,(x^{\prime\prime\prime})\,(x^{\prime})\,(x^{\prime v})$

Pag. 400

(T)

(A') $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$, $f(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x')$, $f(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x')(x'')$, $f(x^{\prime v})(x^{v})(x')(x'')(x''')$, $f(x^{v})(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})$

(A'') $f(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$, $f(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x'')$, $f(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x'')(x')$, $f(x^{\prime v})(x^{v})(x'')(x')(x''')$, $f(x^{v})(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})$

(A''') $f(x')(x''')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})$, $f(x''')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})(x')$, $f(x'')(x^{\prime v})(x^{v})(x')(x''')$, $f(x^{\prime v})(x^{v})(x')(x''')(x'')$, $f(x^{v})(x')(x''')(x'')(x^{\prime v})$

(A'v) $f(x''')(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v})$, $f(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x''')$, $f(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x''')(x'')$, $f(x^{\prime v})(x^{v})(x''')(x'')(x')$, $f(x^{v})(x''')(x'')(x')(x^{\prime v})$

(Av) $f(x'')(x''')(x')(x^{\prime v})(x^{v})$, $f(x''')(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x'')$, $f(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x'')(x''')$, $f(x^{\prime v})(x^{v})(x'')(x''')(x')$, $f(x^{v})(x'')(x''')(x')(x^{\prime v})$

zione tale per la forma che conserverà il proprio valore ad una delle permutazioni indicate al (4' n.° 21), e che però essendo $n = 5 = m$ avrà la forma

$(z)\ f\ (x', x'', x''', x'^v, x^v)$

ed un solo valore.

Se poi fossero i cinque valori alla fila (A') uguali fra loro, ed ai cinque collocati alla fila (A^v); (3) in tal caso paragonando delle due date file il primo al primo, e l' ultimo rispettivamente all' ultimo valore, si vedrà pei (numeri 14, 19, 20) che la (z) dovrà esser tale per la forma, che degli 1. 2. 3. 4 valori nati permutando in tutte le maniere possibili le sole radici collocate alle prime quattro caselle, se ne dovrà uguagliare un numero non minore di 1. 3. 4, e però la (z) sarà una funzione tale per la forma che due al più saranno i suoi valori disuguali nati col permutare in tutte le maniere possibili le radici x', x'', x''', x'^v collocate alle prime quattro caselle; ma la (z) è tale ancora come si è veduto, che due risultati (P), (Q) dei cinque ottenuti nel modo del (n.° 9) sono uguali; dunque pel (n.° 23) la medesima avrà al più due valori disuguali.

Dunque in ogni caso la (z) non potrà mai esser tale per la forma che il numero dei suoi valori disuguali sia < 5, e > 2. C. *d. d.*

Parte 2.ª Sia $m > 5$, ed in primo luogo $m = 6$; così che si abbia la

$(z)\ f\ (x')\ (x'')\ (x''')\ (x'^v)\ (x^v)\ (x^{v'})$

in tal caso dovranno uguagliarsi in modo i valori nati dalle sole

---

(3) *A questo solo caso si poteva ridurre la dimostrazione della presente prima parte riflettendo, che nella nostra ipotesi dovranno sempre uguagliarsi i due valori* (A') $f\,(x')(x'')(x''')(x^v)(x^v)$, (A^v) $f(x'')\ (x''')\ (x')\ (x'^v)\ (x^v)$ *giacchè pel (n.°* 24, *e nota (* 2 *)) sì l' uno che l' altro deve essere uguale al risultato* $f\ (x''')\ (x')\ (x'^v)\ (x^v)\ (x'')$.

possibili permutazioni delle radici x', x'', x''', x^{iv}, x^{v} collocate alle cinque prime caselle, che il numero dei disuguali rimanga < 5. Ora facendo su tali valori il discorso fatto nella prima parte precedente, si proverà che la (z) sarà una funzion tale per la forma, che due al più saranno i valori disuguali nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate alle prime cinque caselle. Ma nella nostra ipotesi pel (n.° 25) dovranno uguagliarsi due risultati (P), (Q) fra i sei, che si ottengono mediante la permutazione del (n.° 9); dunque pel (n.° 23) la data (z) non potrà avere se non che al più due valori disuguali.

Sia in secondo luogo $m = 7$ e la

(z) $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{iv})\,(x^{v})\,(x^{vi})\,(x^{vii})$

In tal caso fatto il discorso precedente sopra i valori ottenuti dalle sole permutazioni possibili delle prime sei radici fra loro, si vedrà che la (z) dovrà per la forma esser tale che due al più sieno i suoi valori disuguali nati dalle indicate permutazioni; e quindi si vedrà pei (numeri 25, 23) che la medesima dovendo avere meno di cinque valori disuguali, non ne potrà aver più di due.

Continuando a fare un simile discorso nelle successive ipotesi di $m = 8, 9, 10$, ec., si vedrà in generale che in qualunque supposizione di $m > 5$ la funzione (Z) non potrà mai esser tale per la forma, che il numero de' suoi valori disuguali sia < 5, e > 2. C. *d. d.*

Dunque la (Z), essendo m uguale o maggiore di 5, non potrà esser tale per la forma che meno di cinque, e più di due siano i suoi valori disuguali. C. *d. d.*

27. Accennerò di volo alcune verità, che possono dedursi dai principii stabiliti di sopra: eccole.

Essendo la (Z) tale per la forma, che risultino fra loro uguali i p valori del (3° n.° 6.); in tal caso paragonandoli fra loro due a due, e deducendo nelle diverse supposizioni tutti i valori che dovranno quindi uguagliarsi a norma del (2° n.° 6), se il rispettivo loro numero venga espresso dalle lettere a, b, c, d, ec. io dico che p sarà multiplo di a, b, c, d, ec.

Ottenuti tutti i valori, che dovranno uguagliarsi nella supposizione di $(A') = (A'')$, siano questi di numero a compresi i due (A'), (A''); in tal caso siccome pel (3° n.° 6) tali valori si devono rinvenire nei p dati, così si potrà considerare che vengano espressi dai primi a risultati nei p dati $(A'), (A''), \ldots (A^{(a)}), (A^{(a+1)}), \ldots\ldots A^{(p)}$

Dunque sarà p uguale, o maggiore di a; se $p > a$, in tal caso il valore $(A^{(a+1)})$ dovrà uguagliarne altri $(a-1)$ (1° n.° 6) ottenuti da $(A^{(a+1)})$ mediante le rispettive permutazioni che scorgonsi fra (A') ed (A''), (A'''), ec. $A^{(a)}$; ma tali valori saranno compresi nei p dati (3° n.° 6); dunque sarà p uguale o maggiore di $2a$; ma se fosse $p > 2a$, replicato sul valore $(A^{(2a+1)})$ lo stesso discorso, si vedrà che sarà p uguale, o maggiore di $3a$, ed in questo ultimo caso replicato il discorso ec., ec. si dovrà finalmente giungere ad avere $p = na$.

Il raziocinio fatto intorno agli a valori ottenuti in forza del (2° n.° 6) dalla supposizione di $(A') = (A'')$, si può fare egualmente dei b valori ottenuti (2° n.° 6) supponendo $(A') = (A''')$; ec. e generalmente del rispettivo numero di valori, che in forza del citato (2° n.° 6) si ottengono nelle diverse supposizioni di due valori uguali fra i p dati. Dunque p sarà multiplo dei numeri a, b, c, d, ec.

28. Tre soli sono i modi con cui si possono movere quattro radici mediante una permutazione semplice del genere secondo, ossia movendole due a due reciprocamente, e simultaneamente.

Per es. nel risultato

$(A')\ f\,(x')\ (x'')\ (x''')\ (x^{\text{iv}})\ (x^{\text{v}})$

movendo le radici collocate alle prime quattro caselle nel modo citato, non si potrà mai formare se non che uno dei seguenti tre valori.

1.° $f(x'')(x')(x^{\prime v})(x''')(x^{v})$, 2.° $f(x''')(x^{\prime v})(x')(x'')(x^{v})$,
3.° $f(x^{\prime v})(x''')(x'')(x')(x^{v})$.

29. Se dei quattro valori compreso A' indicati al (n.° precedente) due sono uguali per la forma della (z), in tal caso due soli saranno pure i valori che si uguaglieranno in forza del (2° n.° 6.) ; ma se tre dei citati valori fossero uguali, in tal caso lo saranno tutti e quattro . (3° n.° 6) .

30. Dimostrato nella prima parte (n.° 26) che il grado p d' uguaglianza nella

(z) $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$

non può mai essere uguale a 30, o a 40, vediamo ora se possa essere uguale a 15. A tale effetto suppongo la (z) tale per la forma che sia $p = 15$; in tal caso si dovranno verificare le seguenti condizioni.

1.ª Che nei quindici valori uguali stante l' ipotesi mai si incontrerà costantemente ferma ad una data casella una delle cinque radici x', x'', ec. x^{v}, mentre nel caso i detti valori nati sarebbero dalle sole possibili permutazioni di quattro radici collocate in quattro caselle date, cosa impossibile (§.° 98 Teor. Equazioni o nota (1) §. 7.°), non potendo per una conseguenza dei (§§. citati) dei 24 valori nati dalle riferite permutazioni uguagliarsene fra loro se non se numero p' divisore esatto dell' altro 1. 2. 3. 4.

2.ª Che si dovranno uguagliare almeno due valori fra i 24 nati dalle sole possibili permutazioni di quattro radici collocate in quattro caselle date.

3.ª Che, chiamati (A'), (A'') i due valori della (2.ª condizione precedente), questi non potranno mai esser tali che nel lor paragone s' incontrino smosse due sole, o tutte e quattro le date radici ; mentre in ambi i casi p non sarebbe uguale a 15 contro l' ipotesi (numeri 2.° 6, 29, 27), e (n.° 262 Teor. Equazioni) .

4.ª Che dei 24 valori nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate alle prime quattro caselle, se ne dovranno uguagliare due (A'), (A'') tali, che nel lor paragogone s' incontrino smosse tre sole radici; lo stesso si dica dei 24 valori nati dalle sole possibili permutazioni di quattro radici collocate in quattro caselle date qualunque (2ª, 3ª condizione precedente).

Ora volendo adempiere alla condizione (4.ª precedente) si uguaglieranno fra loro i valori (A'), (A''), (A'''), (A'^{v}), per cui stante i (numeri 19, 20) si concluderà che la data (z) sarà tale per la forma, che dei 24 valori nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate in quattro date caselle, dodici almeno saranno uguali (4); ma per la 1ª

---

(4) *Per la condizione 4.ª sarà*

$(A')\, f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}) = f(x'')(x''')(x')(x'^{v})(x^{v})$ (1ª)

oppure $= f(x'')(x'^{v})(x''')(x')(x^{v})$ (2ª)

(I) *oppure* $= f(x''')(x'')(x'^{v})(x')(x^{v})$ (3ª)

o finalmente $= f(x')(x''')(x'^{v})(x'')(x^{v})$ (4ª)

e per la stessa condizione sarà

$(A')\, f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}) = f(x')(x''')(x'^{v})(x'')(x^{v})$ (1ª)

oppure $= f(x')(x''')(x^{v})(x'^{v})(x'')$ (2ª)

(II) *oppure* $= f(x')(x'^{v})(x''')(x^{v})(x'')$ (3ª)

o finalmente $= f(x')(x'')(x'^{v})(x^{v})(x''')$ (4ª)

Ora combinando ciascuna equazione (I), *a ciascheduna* (II) *nascono sedici casi, dei quali basterà svilupparne tre soli per la facile intelligenza degl' altri.*

1.° $(A')\, f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}) = (A'')\, f(x'')(x''')(x')(x'^{v})(x^{v}) = (A''')\, f(x')(x''')(x'^{v})(x'')(x^{v})$ *in tal caso paragonando* (A') *ad* (A''), (A') *ad* (A'''), *si vedrà pei* (*numeri* 14, 19, 20) *che dovranno uguagliarsi almeno dodici valori dei* 24 *nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate alle prime quattro caselle.*

2.° $(A')\, f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}) = (A'')\, f(x'')(x'^{v})(x''')(x')(x^{v}) = (A''')\, f(x')(x''')(x^{v})(x'^{v})(x'')$, *in tal caso essendo* $(A') = (A'')$ *pel* (1° *n.°* 6) *sarà* $(A''') = (A'^{v})\, f(x''')(x'^{v})(x^{v})(x')(x'')$

(condizione) saranno uguali due valori della (z) (P), (Q) tali che nel lor paragone si moverà la radice collocata alla casella in cui sempre restava ferma una data radice nei dodici precedenti valori uguali; dunque nell' adempiere alle condizioni neccessarie per soddisfare all' ipotesi di $p = 15$ saremo condotti pei (numeri 17, 19) ad avere per lo meno $p = 60$. Dunque ec.

31. Se per la forma della
$(z)\ f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v})$
sia il grado d'uguaglianza $p > 24$; in tal caso non potrà essere uguale se non che a 60, oppure a 120.

Per la (nota (1) (al n.° 7) p deve essere un divisore esatto di 120. Ora essendo per la supposizione $p > 24$ si vede dal (n.° 26) che necessariamente sarà uguale a 60, od a 120.

32. Se per la forma della precedente (z) p sia multiplo di 3, e di 5; in tal caso sarà $p = 60$, od $= 120$.

Pel (n. 30) mai sarà $p = 15$; ma p deve essere un divisore esatto di 120 e multiplo insieme di 3, e di 5; dunque pel (n.° 26) sarà $p = 60$, od $= 120$.

33. Dunque se nella precedente (z) siano fra gli altri ugua-

---

e quindi paragonando (A') *ad* (A'''), (A'') *ad* (A'v), *si vedrà pei (citati numeri* 14, 19, 20) *che si dovranno uguagliare almeno dodici valori dei* 24 *nati dalle sole possibili permutazioni delle radici collocate alle quattro caselle* 1ª, 2ª, 3ª, 5ª.

3.° *Combinando la quarta equazione* (I) *con la prima* (II); *quest' unico caso si può ridurre ad uno dei due precedenti riflettendo, che per la (condizione* 4ª) *sarà*

$$(\mathrm{A}')\ f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v}) = f\,(x''')\,(x'')\,(x'^{v})\,(x')\,(x^{v}) \quad (1^{a})$$

$$\textit{oppure} = f\,(x''')\,(x'')\,(x^{v})\,(x'^{v})\,(x') \quad (2^{a})$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \textit{oppure} = f\,(x'^{v})\,(x'')\,(x''')\,(x^{v})\,(x') \quad (3^{a})$$

$$\textit{o finalmente} = f\,(x')\,(x'')\,(x'^{v})\,(x^{v})\,(x''') \quad (4^{a})$$

e poscia combinando la 4ª *equazione* (I) *con ciascheduna delle equazioni* (III).

uguali i tre valori (A′), (A″), (A‴), e che nel paragone di due dei medesimi si incontri una permutazione fra tre radici e nel paragone del terzo rimanente ad uno dei due precedenti si incontri una permutazione semplice di primo genere fra tutte e cinque le x', x'', ec. x^{v}; in tal caso sarà $p = 60$; od $= 120$.

Questa è una conseguenza dei (numeri 27, 32)

34. Dal (n.° precedente) facilmente si rileva che se per la forma della (z) sia il valore

$$(A')\,f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v})$$

uguale ai tre valori 1°, 2°, 3° indicati al (n.° 28), e nello stesso tempo uguale ad un altro valore (A″) nel di cui paragone ad (A′) si incontri una permutazione semplice di primo genere fra le cinque x', x'', ec. x^{v}, in tal caso sempre sarà $p = 60$, od $= 120$.

Qualunque sia la permutazione semplice di primo genere fra le x', x'', ec. x^{v} la quale incontrar si possa nel paragone di (A′) ad (A″) sempre sarà

$$\begin{aligned}
(A')\,f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v}) &= (A1'')\,f\,(x'')\,(x''')\,(x'^{v})\,(x^{v})\,(x') \\
\text{oppure} &= (A2'')\,f\,(x'')\,(x'^{v})\,(x')\,(x^{v})\,(x''') \\
\text{oppure} &= (A3'')\,f\,(x'')\,(x^{v}, (x')\,(x''')\,(x'^{v}) \\
\text{oppure} &= (A4'')\,f\,(x'')\,(x''')\,(x^{v})\,(x')\,(x'^{v}) \\
\text{oppure} &= (A5'')\,f\,(x'')\,(x'^{v})\,(x^{v})\,(x''')\,(x') \\
\text{o finalmente} &= (A6'')\,f\,(x'')\,(x^{v})\,(x'^{v})\,(x')\,(x''')
\end{aligned}$$

Paragonando ora ciascun risultato (A1″), (A2″), ec. (A6″) a ciascun valore 1°, 2°, 3° del (n.° 28) si rileverà, almeno in uno dei rispettivi tre paragoni, una permutazione in cui si moveranno tre sole radici; dunque nella nostra supposizione p sarà multiplo di 3, e di 5 (n.° 27) e però uguale a 60, od a 120 (n.° 33).

35. Se nella (Z) il grado d'uguaglianza $p = 1 . 3 . 4 \ldots m$, così che due ne più, ne meno siano i suoi valori disuguali, in tal caso saranno sempre disuguali due valori della (Z) espressi dalle forme (A′), (A″) nate l'una dall'altra mediante una permutazione semplice del *genere primo* fra un numero *pari* di radici . (§ 257. Teor. Equazioni) .

Dal seguente esempio sarà facile di rilevare il modo con cui generalmente dimostrar puossi l' enunciata proposizione.

Sia la (z) $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})(x^{v\prime\prime})$
ed il suo grado d' uguaglianza $p = 1.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.$; in tal caso non potranno uguagliarsi i due valori
(A') $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})(x^{v\prime\prime})$, (A'') $f(x''')(x^{\prime v})(x'')(x^{v\prime})(x')(x^{v})(x^{v\prime\prime})$
Stante l' ipotesi, ed il (n.° 15) (A') non cambia valore permutando tre radici nel modo del (n.° 9), dunque se in (A') si permutino le tre radici, che numerando dal segno f andando a destra, sono le prime a muoversi nello stesso (A') onde formare (A''), si genererà il risultato
(N') $f(x''')(x')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})(x^{v\prime\prime})$
tale, che, stante il modo di sua formazione, e la natura della permutazione supposta fra (A'), ed (A''), si dovranno ritrovare nel paragone con (A'') ferme due radici delle sei che movonsi fra (A'), ed (A''), e smosse le quattro rimanenti.

Così pel (cit.° n. 15) (N') non cambia valore permutando tre radici nel modo del (n.° 9), e però movendo in (N') le radici *prima*, *quarta*, *quinta*, numerate non già dalla loro posizione, ma dall' ordine con cui smovonsi in (A') per la formazione di (A''), si genererà un valore
(N'') $f(x''')(x^{\prime v})(x'')(x^{v\prime})(x^{v})(x')(x^{v\prime\prime})$
tale, che paragonato ad (A''), delle sei radici smosse fra questo ed (A'), quattro saranno ferme, e permutate reciprocamente le due rimanenti.

Ora (A') = (N'), ed (N') = (N''), dunque (A') = (N'').

Facciasi, se è possibile, nella supposizione di $p = 1.3.4.5.6.7$, (A') = (A''); sarà per conseguenza (A'') = (N''); ma in tal caso sarebbe il grado d' uguaglianza $p = 1.\ 2.\ 3.\ldots.7$ (numeri 15, 21), dunque essendo ciò contra l' ipotesi, si vede che ec.

Supposto $2n > 6$ il numero delle radici smosse mediante una permutazione semplice del genere primo fra (A'), ed (A''); in tal caso permutando nel valore (N'') le tre radici *pri-*

prima, *sesta*, *settima* smosse in (A') per la formazione di (A'') si otterrebbe un risultato $(N''') = (N'')$; da (N''') si otterrebbe $(N^{\prime v})$ movendo le radici *prima*, *ottava*, *nona* smosse sempre in (A') nella formazione d' (A'') ec., e finalmente un risultato $(N^{(\mu)}) = (N^{(\mu-1)}) = \ldots\ldots = (N') = (A')$, e tale che paragonato ad (A''), delle date $2n$ radici se ne troverebbero ferme $2n - 2$, e smosse reciprocamente le due rimanenti, e quindi ec.

36. Se nelle stesse supposizioni della (Z) (n.° precedente) in vece di $2n$, il numero delle radici smosse mediante una permutazione semplice di primo genere nel paragone di (A') ad (A'') fosse stato $2n+1$; in tal caso, come ben si vede, la forma $(N^{(\mu)})$ sarebbe divenuta identica all' altra (A''), e si sarebbe quindi concluso essere $(A') = (A'')$.

37. Se per la forma della (Z) i suoi π valori espressi come al (n.° 4) si riducano a due soli disuguali

$$(M)\ f\ (x')(x'')(x''')(x^{\prime v})\ \ldots\ldots\ (x^{(m)})$$

$$(N)\ f\ (x'')(x')(x''')(x^{\prime v})\ \ldots\ldots\ (x^{(m)}),\ (\text{ n.° } 22\ )$$

Si potrà colla scorta dei (numeri 35, 36) formare un criterio onde conoscere dei $\pi - 2$ rimanenti quali sieno gli uguali ad (M), e quali gli uguali ad (N).

Ritorno al § 99 d' onde sono partito nella lettura del vostro Libro; vi comunicherò di mano in mano le riflessioni che mi sarà dato di fare sicuro che compatirete, e supplirete colla vostra penetrazione alle mie solite mancanze di precisione, e chiarezza. Amatemi, e credetemi ec.

Modena 30 Settembre 1802.

DELLA INSOLUBILITA' DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE GENERALI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

MEMORIA

DI PAOLO RUFFINI

Presentata il dì 18. *Dicembre* 1802.

L'ingegnosissima precedente lettera scrittami da Pietro Abbati mio amicissimo, e Personaggio di grandi talenti e di profonda penetrazione quella si è, che mi à eccitato a formare, e ad esporre al Pubblico una nuova Dimostrazione della insolubilità algebraica delle Equazioni generali di grado superiore al quarto. Mentre nel Capo 15.° della mia Teoria delle Equazioni ò esposta la Dimostrazione di questo importantissimo Teorema, ò indicate, per così dire, le tracce che ò tenute per iscuoprirlo, fissando l' attenzione principalmente sulle Equazioni di 5.° grado; ma confessar deggio che i raziocinii a tal fine colà eseguiti, benchè forse più diretti, non sono i più facili, e che la Dimostrazione è bensì esattissima riguardo all' Equazione di 5.° grado, ma tale non è rapporto a quelle di grado ulteriore. Non ogni volta che vien dato di dimostrare per la prima fiata un Teorema di difficile scuoprimento, i discorsi che perciò si eseguiscono, sono i più semplici, e i più esatti. Nella Memoria presente procurerò di dimostrare la Proposizione medesima con raziocinii meno astrusi, io spero, e forniti di tutto il rigore; e considerata da prima l' Equazione generale di 5.° grado, passerò in seguito a provare con tutta esattezza impossibile la soluzione algebraica delle Equazioni generali di grado superiore al 5.°.

Per ciò fare necessario mi sarà l' appoggiarmi su varie Proposizioni esposte nella mia Teoria delle Equazioni; ma per togliere al Lettore il pensiere di ricorrere ad essa, siami permesso di quì accennarle.

1.° Le radici di una Trasformata sono funzioni delle radici della Equazione data (n.° 88. Teor. delle Equaz.).

2.° Chiamata $x^m + Ax^{m-1} +$ ec. $= 0$ un' Equazione algebraica generale, ed $y^n + My^{n-1} +$ ec. $= 0$ una sua Trasformata, in cui $y = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(m)})$; se quest' ultima funzione è algebraica e razionale, i coefficienti M, ec. saranno funzioni razionali degli altri A. ec. (n.° 105. Teor.) (Lagrange n.° 96. Reflex. sur la Resolut. algebr. des Equat. Memoir. de Berl. pour l'An. 1771.); e i valori della y dipendendo tutti dalle permutazioni fra le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ (n.° 92. Teor.), l' esponente n sarà eguale, o summultiplo di $1.2.3 \dots m$ (n.° 99. Teor.), (Lagrange n.° 99. Reflex.)

3.° Volendosi, che la $y^n . +$ ec. $= 0$ ci esprima quella trasformata, pel cui mezzo si cerca la soluzione della $x^m +$ ec. $= 0$ (n.° 227. Teor.), la y potrà sempre supporsi funzione delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ algebraica, e razionale (n.° 241 Teor.).

4.° Essendo l' Equazione data $x^m +$ ec. $= 0$ generale, la sua Trasformata $y^n +$ ec. $= 0$ ottenuta opportunamente avrà per radici solamente i valori tra loro diversi della funzione $f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(m)})$ (n.° 105 Teor.), e quindi avrà tutte le radici diseguali.

5.° Se uno dei risultati della funzione $y = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(m)})$ è di tal forma, che in conseguenza di questa conservi il proprio valore per una permutazione fra le radici, che in esso occupano certi determinati luoghi; sotto la permutazione medesima fra le radici dei medesimi luoghi lo conserverà ancora qualunque altro dei risultati della y (n.° 98 Teor.), (Lagrange n.° 97. Reflex.).

6.° Chiamansi permutazioni semplici di 1.° genere quelle, nelle qua'i non possono alcune delle radici, che vi sono comprese, cambiarsi fra loro separatamente dalle altre: tale è la permutazione di x' in x'', di x'' in x''', e di x''' in x', per cui la $\frac{x'^2}{x''} + \frac{x'''^2}{x'} + \frac{x''^2}{x'''}$ mantiene il proprio valore. Permutazioni poi semplici di 2.° genere diconsi quelle, in cui mentre alcune delle radici che le formano, cambiansi fra loro, altre si cambian fra loro separatamente dalle prime: per tale permutazione conserva il valor proprio sotto la contemporanea permutazione di x' in x'^v, e di x'' in x''' la $\frac{x' + x'''^3}{x'^v} + \frac{x'^v + x''^3}{x'}$ (n.° 257. Teor.).

7.° Il numero di tutti i risultati, che nascono dalla y per una permutazione semplice di 1.° genere ripetuta quanto si può, uguaglia il numero delle radici, che entrano nella permutazione supposta; e ciascuna di queste radici occupa in tali risultati una sola volta ciascuno dei luoghi appartenenti a simile permutazione (num. 262, 263 Teor.).

8.° In conseguenza della definizione del (6.° prec.) vedesi potersi dire che di due risultati della $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$ fra loro disuguali l'uno nasce sempre dall' altro per una permutazione semplice di 1.°, o di 2.° genere.

9.° In conseguenza di una permutazione qualunque replicata sulla $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$ quanto si può, se quindi ottengansi p valori tra loro uguali per la forma, i valori tutti della nostra funzione saranno per tale permutazione fra loro uguali a p a p. (n.° 98. Teor.) (Lagrange n.° 97. Reflex.)

10.° Cercando il valore di una Funzione razionale $y = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(m)})$ dal valore t' di un' altra razionale $t = \varphi(x')(x'')(x'') \ldots (x^{(m)})$, caderemo per y in un' Equazione di tanto grado, quanti sono i valori della t uguali a t', corrispondentemente ai quali i valori della y sian fra loro diversi ; e i coefficienti della Equazione in y ottenuta saranno funzioni razionali della t' (n.° 150. Teor.), (Lagrange n.° 102. Reflex.)

PARTE PRIMA.

DELLA INSOLUBILITA' DELLA EQUAZIONE GENERALE ALGEBRAICA DI GRADO 5.°

1.° Supposte le cinque radici x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, formiamo con esse una funzione qualunque

(A) $$f\,(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v});$$

facciansi su di questa tutte le permutazioni possibili, che riguardano le prime quattro radici, lasciando sempre immobile la x^{v}, ed i 1. 2. 3. 4 = 24 risultati, che ne vengono, scrivansi nell' annessa Tavola in (B) per modo, che la prima colonna verticale contenga i sei risultati, i quali nascono dalle permutazioni fra le prime radici x', x'', x''', e le altre colonne contengano tutti gli altri risultati, e questi distribuiti per modo, che in ciascuna fila orizzontale esistano quelli, i quali provengono da cadaun risultato della prima colonna, mentre si porti successivamente nel quarto luogo la radice esistente nel primo: così il risultato 7.° nasce dal 1.° col portare la radice x' nel quarto luogo; il 13.° proviene dal 7.° trasportando nel posto quarto la x'' esistente nel primo luogo del risultato 7°; e nel modo medesimo il risultato 19.° si forma dal 13.°

2. In tutti i risultati della prima colonna vedesi, che la x^{iv} esiste nel quarto luogo, nei risultati della colonna seconda esiste nel terzo, nel secondo in quei della terza, e nel primo in quei della quarta.

Avvertiamo ora per sempre che, quando non si dica altro in contrario, la nostra funzione (A) supponesi algebraica, e razionale (3.° Intr.), e avvertiamo che le nostre supposizioni, e considerazioni riguardano sempre la forma delle funzioni, e non mai il valore particolare delle radici x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, che le compongono.

3. Volendosi la funzione (A) tale, che in (B) il ris.° 1.°

uguagli due dei tre risultati 13.°, 12.°, 24.°, i quali da lui nascono per le permutazioni semplici di 2.° genere fra le x', x'', x''', x^{iv}; io dico che dovrà uguagliarli tutti e tre, e però avremo il ris.° 1.° = 13.° = 12.° = 24.° .

1.° Abbiasi il ris.° 1.° = 13.°, ed = 12.°. Dovendo il ris.° 12.° $f(x'')(x')(x^{\text{iv}})(x''')(x^{\text{v}})$ mantenere il proprio valore per la permutazione, onde dal 1.° nasce il 13.° (5. Intr.), ne verrà il 12.° $= f(x^{\text{iv}})(x''')(x'')(x')(x^{\text{v}}) =$ 24.°; ma il 1.° = 12.° per la ipotesi. Dunque sarà il 1.° = 13.° = 12.° = 24.° .

2.° Sia il ris.° 1.° = 13.°, ed = 24.° . Per l'uguaglianza del 1.° al 13.° risulterà il 24.° = 12.° (5.° Intr.). Dunque ancora in questo caso avremo l'indicata uguaglianza.

3.° Posto il ris.° 1.° = 12.°, ed = 24.°, per la prima di queste uguaglianze risulterà il 24.° = 13.°, e però ec. Dunque ec.

4. Se si voglia che la (A) abbia un numero < 6 di valori differenti fra loro; in (B) il ris.° 1.° dovrà necessariamente conservare il proprio valore per una permutazione fra due, o fra tutte e tre le radici x', x'', x'''.

Consideriamo in (B) la prima colonna verticale. In questa contengonsi gli 1. 2. 3 = 6 risultati, che si formano per le permutazioni tutte fra le sole x', x'', x'''. Ora questi sei risultati non possono essere tutti disuguali fra loro, perchè altrimenti i valori della (A) fra loro differenti non sarebbero meno di 6. Dunque dovendo due di essi uguagliarsi fra loro, e tale uguaglianza non potendo succedere, che per una permutazione fra due, o tutte e tre le radici x', x'', x''', ne viene pel (5.° Intr.) che ancora il ris.° 1.°, e per conseguenza la funzione (A) dovrà conservare il proprio valore per la permutazione medesima. Dunque ec.

5. Se la nostra funzione (A) è tale, che conservi il proprio valore per due permutazioni semplici di 1.° genere, cadauna fra tre delle prime quattro radici x', x'', x''', x^{iv}, essa (A) non potrà avere più di due valori disuguali, mentre

tre una delle radici appartenenti alla permutazione seconda sia diversa da quelle, che appartengono alla prima.

Supponghiamo primieramente, che una delle supposte permutazioni riguardi le radici, che nella (A) occupano i primi tre posti, onde in (B) si abbia il ris.° 1.° = 3.°, e che l' altra riguardi le radici dei luoghi secondo, terzo, e quarto per cui sia il ris.° 1.° = 8.°. In questa ipotesi la permutazione prima pel (5.° Intr.) ci darà i risultati

1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$
3.° $f(x'')(x''')(x')(x^{\prime v})(x^{v})$
4.° $f(x''')(x')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})$

uguali fra loro. Facciamo su ciascuno di questi la permutazione seconda, pel cit.° (5.° Intr.) ci verrà

il ris.° 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(^{v}) =$ 8.° $f(x')(x''')(x^{\prime v})(x'')(x^{v})$
il 3.° $f(x'')(x''')(x')(x^{\prime v})(x^{v}) =$ 12.° $f(x'')(x')(x^{\prime v})(x''')(x^{v})$
il 4.° $f(x''')(x')(x'')(x^{\prime v})(^{v}) =$ 11.° $f(x''')(x'')(x^{\prime v})(x')(x^{v})$;

in seguito facciamo sopra i tre 8.° 12.° 11.° la permutazione prima, e pel solito (5.° Intr.) avremo

il ris.° 8.° $f(x')(x''')(x^{\prime v})(x'')(x^{v}) =$ 13.° $f(x''')(x^{\prime v})(x')(x'')(x^{v})$ = 23.° $f(x^{\prime v})(x')(x''')(x'')(x^{v})$; il 12.° $f(x'')(x')(x^{\prime v})(x''')(x^{v})$ = 15.° $f(x')(x^{v})(x'')(x''')(x^{v})$ = 20.° $f(x^{\prime v})(x'')(x')(x''')(x^{v})$ lo 11.° $f(x''')(x'')(x^{\prime v})(x')(x^{v})$ = 16.° $f(x'')(x^{\prime v})(x''')(x')(x^{v})$ = 24.° $f(x^{\prime v})(x''')(x'')(x')(x^{v})$; ma i risultati 8°, 12°, 11°, sono uguali ai 1.°, 3.°, 4.°, e questi uguali fra loro; dunque esisterà uguaglianza fra tutti i risultati sin ad ora ottenuti. Facendo sopra del 2.° il discorso medesimo, e le stesse operazioni, che abbiam fatte sopra del 1.°, troveremo in egual modo divenire fra loro uguali i risultati 2.°, 5.°, 6.°, 7.°, 10.°, 9.°, 14.°, 17.°, 18.°, 21.°, 19.°, 22.°. Dunque avendosi

(I) il ris.° 1.° = 3.° = 4.° = 8.° = 12.° = 11.° = 13.° = 15.° = 16.° = 23.° = 20.° = 24.°
il 2.° = 5.° = 6.° = 7.° = 10.° = 9.° = 14.° = 17.° = 18.° = 21.° = 19.° = 22.°,

i risultati (B) saranno fra loro uguali a 12 a 12, e per conseguenza i valori della (A) tra loro disuguali in questo primo caso non saranno più di due. Os-

Osservando tutti i risultati, che nella presente ipotesi nati sono dal 1.°, veggo che tra essi i tre 1.°, 3.°, 4.° contengono tutti la x'^{v} nel quarto luogo, perchè tal radice non viene compresa dalla prima permutazione, e veggo che per la natura delle permutazioni semplici di 1.° genere in ciascuno dei loro primi tre luoghi ciascuna contienesi delle x', x'', x''', cosicchè nel secondo luogo il risultato 1.° contiene la x'', il 3.° contiene la x''', ed il 4.° la x'. Ora eseguendo sopra questi risultati 1.°, 3.°, 4.° la permutazione seconda, nella formazione dei risultati 8.°, 12.°, 11.°, la radice, che occupava in quelli il luogo secondo, passa ad occupare in questi il luogo quarto, e la radice del quarto portasi nel terzo. Dunque il ris.° 8.° conterrà nel luogo quarto la x'', e però nei primi tre le x', x''', x'^{v}; il 12.° conterrà nel quarto la x''', e quindi nei primi tre le x'', x', x'^{v}; lo 11.° avendo nel quarto la x', nei primi tre conterrà le x'', x''', x'^{v}; e finalmente il 1.° avendo nel luogo quarto la x'^{v}, e nei tre primi le x', x'', x''', ne segue che fra tutte le combinazioni a tre a tre delle x', x'', x''', x'^{v} una ne esisterà nei primi tre posti del ris.° 1.°, un'altra nei primi tre luoghi del ris.° 8.°, una terza nei tre posti primi del ris.° 12.°, e l'ultima nei primi tre luoghi del ris.° 11.° Le radici dunque, che esistono nei primi tre luoghi di uno fra i risultati 1.°, 8.°, 12.°, 11.° essendo in complesso diverse dalle esistenti nei primi tre luoghi di un altro; ne viene evidentemente, che eseguendo su cadauno di questi 1.°, 8.°, 12.°, 11.° la permutazione prima, si produrranno dodici risultati di forma diversa, i quali precedentemente abbiamo dimostrati tutti fra loro uguali, e tali sono gli indicati in (I) nella prima linea orizzontale.

Supponghiamo ora, che la prima delle permutazioni supposte invece delle x', x'', x''' riguardi altre tre quali si vogliono delle x', x'', x''', x'^{v}, e supponghiamo che lo stesso faccia pur anche, se così piace, la permutazione seconda. In tale supposizione sempre troveremo che ottenuti dal primo i risultati, che dipendono dalla prima permutazione, coll' eseguire su questi tre la permutazione seconda, potremo in ciascuno di essi far passare come precedentemente ad uno dei luoghi appartenenti alla permutazione prima, quella radice che prima non vi esisteva, e togliere contemporaneamente da tai luoghi in uno dei risultati la prima, in un altro la seconda, e nel terzo la terza delle radici, che nel 1.° risultato appartenevano alla prima permutazione. Dunque eziandio in questa seconda ipotesi avremo quattro risultati, compresovi il 1.°, i quali nei tre luoghi spettanti alla permutazione prima contengono le quattro combinazioni a tre, a tre delle x', x'', x''', $x^{\prime v}$, e però eseguendo su di essi tale prima permutazione, ci verranno dodici risultati di differente forma, e che, come precedentemente, si trovano tutti uguali fra loro. Dunque in tutti i casi sarà vero, che ec.

6. Il Teorema medesimo si verifica ancora, se la prima permutazione restando semplice di 1.° genere fra tre radici, la seconda sia semplice del genere 2.° fra tutte e quattro le x', x'', x''', $x^{\prime v}$. Imperciocchè col mezzo della permutazione seconda potremo ancora in questo caso nei tre risultati, che provengono in conseguenza della permutazione prima, togliere dai tre luoghi che le appartengono, tutte e tre le radici che vi esistevano, una per risultato, e in sua vece introdurvi la radice che non v' era compresa; e dipendentemente da ciò avrà luogo lo stesso discorso del (n.° prec.).

7. Paragonando fra loro in (I) due qualsivogliano dei risultati della prima linea, vedesi che uno nasce sempre dall'altro o per una permutazione semplice di 1.° genere fra tre delle x', x'', x''', $x^{\prime v}$, o per una permutazione semplice di genere 2.° fra tutte e quattro le radici medesime. Per tal modo dal 1.° provengono i risultati 3.°, 4.°, 15.°, 16.°, 8.°, 11.°, 23.°, 20° nella prima delle accennate maniere, e gli altri 13.°. 12.°, 24.° provengono nella maniera seconda. Paragonando poi il risultato 1.° con quelli della se-

seconda linea, vedesi, che fra questi i risultati 2.°, 5.°, 6.°, 18.°, 10.°, 21.° produconsi da esso per tante permutazioni fra due sole delle x', x'', x''', x^{iv}, e gli altri 14.°, 17.°, 7.°, 9.°, 19.°, 22.° ne vengon prodotti per tante permutazioni semplici di 1.° genere fra tutte e quattro queste radici. Quindi ne segue: che qualunque siansi le due supposte permutazioni (numeri 5, 6) o semplici entrambe di 1.° genere fra tre delle x', x'', x''', x^{iv}, o semplice la prima di 1.° genere fra tre, e semplice la seconda di genere 2.° fra tutte e quattro le radici medesime, i risultati, che in (B) divengono fra loro perciò uguali a dodici a dodici sono sempre gli stessi.

8. Supponghiamo che, fatte sopra della funzione (A) tutte le possibili permutazioni, degli 1. 2. 3. 4. 5 = 120 risultati che ne vengono, scrivansi nella Tavola annessa in (C) in una colonna verticale prima i 24, che nascono dalle permutazioni fra le prime quattro radici x', x'', x''', x^{iv}, e gli altri si pongano poi in tante file orizzontali distribuiti per modo, che cadauna fila contenga i risultati, i quali produconsi successivamente da ciascun termine della colonna verticale, col trasportare la radice esistente nel primo all' ultimo luogo.

I 24 valori della prima colonna verticale in (C) altro non sono, che i 24 della tavola (B).

Per maggiore brevità supporremo non esposte in (C) attualmente, che le prime quattro file orizzontali e l' ultima; le altre le immagineremo facilmente.

9. Se la (A) mantiene il proprio valore sotto quella permutazione per cui dal 1.° producesi in (C) il ris.° 25.°; i valori di essa (A) tra lor differenti si ridurranno ai soli 24 della prima colonna.

Tutti i risultati della seconda colonna nascono per la formazione della Tavola dai corrispondenti della prima per quella permutazione istessa, sotto cui il ris.° 25.° nasce dal 1.°; i risultati della colonna terza produconsi nella maniera me-

medesima da quei della seconda, e così in progresso. Dunque in conseguenza del ris.° 1. = 25.°, avendosi pel (5.° Intr.) il 25.° = 49.°, il 49.° = 73.°, il 73.° = 97.°, ne verrà il 1.° = 25.° = 49.° = 73.° = 97.°, e nel modo medesimo troveremo il 2.° = 26.° = 50.° = 74.° = 98°, il 3.° = 27.° = 51.° = 75.° = 99.° ec. Dunque tutti i risultati (C) uguagliandosi rispettivamente ai 24 della prima colonna 1.°, 2.°, 3.°, ec. ne viene, che questi ci esprimeranno i 24 valori disuguali della (C), e però ec.

Lo stesso si dice, se la (A) conservasi la medesima per quella permutazione, sotto cui dal ris.° 1.° formasi il 49.°, oppure il 73.°, oppure il 97.°, e la dimostrazione ne è sempre la stessa.

10. Supponghiamo che la (A) conservi il proprio valore sotto due permutazioni, e supponghiamo che per la prima di queste il ris.° 1.° uno ne uguagli di quelli della prima fila orizzontale, e che la permutazione seconda semplice di 1.° genere comprenda le radici dei primi tre luoghi. In tale ipotesi io dico che i valori della (A) fra lor differenti non potranno essere più di due, e tali saranno i due

(II) 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$, 2.° $f(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$.

Per la prima delle supposte permutazioni il ris.° 1.° deve essere uguale ad uno dei seguenti 25.°, 49.°, 73.°, 97.°: dunque per questa permutazione i valori della (A) si riducono ai 24 della prima colonna (n.° 9.). Per la seconda di tali permutazioni il ris.° 25.° non cambiasi di valore, mentre si cambiano fra loro le x'', x''', $x^{\prime v}$; e questo ris.° 25.° è non solo uguale, ma identico ed uno stesso col 1.°, perchè le supposte uguaglianze dipendono non dal valore particolare delle radici, ma dalla forma della funzione (n.° 2): dunque eziandio il ris.° 1.° si manterrà il medesimo, mentre mutansi fra loro le x'', x''', $x^{\prime v}$: ma lo stesso 1.° per la seconda permutazione supposta si mantiene ancora il medesimo al permutarsi fra loro delle x', x'', x'''. Dunque conserverà esso il proprio valore sotto due permutazioni riguardandanti cadauna tre delle quattro prime radici, la prima le x', x'', x''', la seconda le x'', x''', $x^{\prime v}$. Ora i 24 valori della prima colonna in (C) altro non sono, che i 24 (B), e per queste ultime due permutazioni tutti i risultati (B) riduconsi ai due soli 1.°, e 2.° fra lor differenti (n.° 5). Dunque agli stessi due soli 1.°, 2.° verran ridotti eziandio i 24 risultati della prima colonna in (C), e però tutti i 120. Dunque ec.

11. Se la (A) è tale, che cambiandosi contemporaneamente fra loro le x', x'', e fra loro le x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, ne venga il ris° 1.° $f\,(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = f\,(x'')\,(x')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\,(x''')$; io dico che dovrà essere il

1.° $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v}) = 2.°\,f\,(x'')\,(x')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$.

Avendosi il ris.°

1.° $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v}) = 2.°\,f\,(x'')\,(x')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$,

col replicare la permutazione, per cui succede questa uguaglianza, pel (5.° Introd.) otterremo

$f\,(x'')\,(x')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\,(x''') = f\,(x')\,(x'')\,(x^{v})\,(x''')\,(x^{\prime v})$

$f\,(x')\,(x'')\,(x^{v})\,(x''')\,(x^{\prime v}) = f\,(x'')\,(x')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$.

Dunque quest' ultimo ris.° essendo uguale al penultimo, ed il penultimo al supposto $f\,(x'')\,(x')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\,(x''')$, ne viene che a quest' ultimo, il quale non è che il 2.° della Tavola (C), sarà ancora uguale il 1.° $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$.

12. Se la funzione (A) è di tal forma, che in (C) abbiasi il ris.° 1.° uguale ad uno dei seguenti 25.°, 49.°, 73.°, 97.°, e che inoltre non cambii di valore, mentre si cambiano reciprocamente fra loro due qualisivogliano delle radici, che occupano i primi tre luoghi, io dico che in questa supposizione la (A) non avrà che un valor solo.

Nel ris° 1.° la permutazione seconda può aver luogo fra le x', x'', oppure fra le x'', x''', oppure fra le x', x'''.

1.° Cominciamo dal supporre il primo di questi tre casi, onde il ris° 1.° $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$ sia $= 2.°\,f\,(x'')\,(x')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$. Pel (5.° Intr.) il ris.° 25.° non cambierà di valore alla permutazione reciproca fra le

x'',

x'', x'''; ma questo 25.° per la supposizione, pel (n.° 9.), e per quanto abbiamo riflettuto nel (n.° 10) è non solo uguale, ma identico col ris.° 1.° e però identico col 2.°. Dunque neppure questo 2.° si muterà di valore per la permutazione reciproca fra le x'', x''', e però avremo il 2.° $= f(x''')(x')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})$; ma il 2.° = 1.°. Dunque risultando il 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = f(x''')(x')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})$, ne segue che la nostra funzione (A) mantiene il proprio valore non solo per la permutazione, onde dal 1.° formasi in (C) la prima fila orizzontale, ma lo conserva eziandio per la permutazione semplice di 1.° genere fra le x', x'', x'''; in conseguenza adunque di questa proprietà i valori della (A) tra loro diversi si ridurranno ai soli 1.°, e 2°. (n.° 10): ma, per quanto abbiam supposto, deve aversi uguaglianza anche tra questi 1.°, e 2.°. Dunque in questa prima supposizione la nostra funzione non avrà che un solo valore.

2.° La seconda permutazione riguardi nel ris.° 1.° le due radici x'', x'''. In questa ipotesi il ris.° 97.° pel (5.° Intr.) non si cambierà alla permutazione fra le x', x''; ma per le ragioni ora dette questo 97.° è identico col 1.°; dunque non cambiandosi neppure il ris.° 1.° per la permutazione fra x', x'', ne viene che questo secondo caso si ridurrà al (prec. 1.°), e però ancora nella presente supposizione la (A) non avrà, che un valor solo.

3.° Siano x', x''' le due radici che deggiono mutarsi fra loro nella permutazione seconda. Per questa avremo il ris.° 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = f(x''')(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v})$; ma pel (5.° Intr.) la prima delle permutazioni supposte ci dà $f(x''')(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v}) = f(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x''')$; dunque sarà eziandio il 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = f(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x''')$, e per conseguenza esso 1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = f(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$ (n.° 11). Dunque ancora in questo terzo caso, mantenendosi il ris.° 1.° dello stesso valore alla permutazione fra le x', x'', la nostra (A) pel (prec. 1.°) sarà dotata di un valor solo. Dunque ec.

13.

13. Rappresentisi con la

(D) $x^5 + Ax^4 + Ex^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$

la formola generale delle Equazioni algebraiche determinate di 5.° grado, e con la

(E) $y^n + My^{n-1} + Ny^{n-2} + Py^{n-3} + \text{ec.} + V = 0$

si rappresenti una sua trasformata, le radici della quale chiamate y', y'', y''', ec. siano funzioni (1.° Intr.) algebraiche razionali di tutte, o alcune delle x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, essendo queste le radici della (D). Per la natura della trasformata i coefficienti M, N, P ec. saranno tante funzioni commensurabili dei coefficienti A, B, C ec. della (D), e l'esponente n sarà uguale, o summultiplo di $1.2.3.4.5 = 120$ (2.° Intr.).

14. Se nella (E) si vuole $n < 5$, non potrà mai risultare $n > 2$.

Esprimasi in generale con la funzione (A) il valore della y, qualunque esso si voglia. Facendo su questa tutte le possibili permutazioni, i 120 risultati (C) che ne vengono, pel (2.° Intr.), e per essere la (A) una funzione razionale (n. prec.), altro non sono che tutti i valori della y una o più volte ripetuti. Ora dovendo essere $n < 5$, e quindi < 5 il numero dei valori della y fra lor differenti, osservo in primo luogo, che in (C) il ris.° 1.° dev' essere = 25.°, poichè altrimenti pel (n.° 9) i cinque risultati della prima fila orizzontale sarebbero tutti disuguali fra loro, e però non < 5 il numero dei valori della y fra loro diversi contro la ipotesi: osservo in oltre, che a cagione parimenti del numero dei valori della $y < 5$, pel (n.° 4) lo stesso ris.° 1.° deve necessariamente non cambiar di valore per la permutazione fra due, o tutte e tre le x', x'', x'''. Dunque la nostra (A) deve essere tale, che abbiasi il ris.° 1.° = 25.°, e che insieme mantenga il proprio valore per una permutazione fra due, o tutte e tre le radici, che occupano i primi tre luoghi; ma se questo succede pei (num 10. 12) i 120 risultati (C) riduconsi ad uno, oppure tutt' al più a due diversi fra loro, cioè ai due (II). Dunque uno, oppur due solamente potendo essere in corrispondenza i valori diversi della y, ne segue che l' esponente della (E), ossia n, mentre si vuol < 5, deve risultare non > 2 *c. d. d.*

15. Se la (A) è tale, che mantenga il proprio valore per due permutazioni, la prima fra tutte e tre le radici dei primi tre luoghi, e la seconda fra tutte e tre quelle dei luoghi terzo, quarto, e quinto, io dico che i risultati della prima linea orizzontale in (C) dovranno divenire uguali fra loro.

La prima delle permutazioni supposte ci dà
ris.° 1.° $f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v}) = f(x'')(x''')(x')(x'^{v})(x^{v})$
La seconda $f(x'')(x''')(x')(x'^{v})(x^{v}) = 25.°\ f(x'')(x''')(x^{v})(x'^{v})(x')$.
Dunque sarà il 1.° = 25.°, e quindi pel (n. 9.°) saranno fra loro uguali in (C) tutti i risultati della prima linea.

16. Supposta (A) funzion razionale delle $x', x'', x''', x'^{v}\ x^{v}$, vogliasi, che i cinque risultati della prima linea in (C) siano le radici di un' Equazione $Z^5 - M = o$, cosicchè si abbia

(III.) $Z' = 1.°\ f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, $Z'' = 25.°\ f(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})(x')$,
$Z''' = 49.°\ f(x''')(x'^{v})(x^{v})(x')(x'')$, $Z^{v} = 73.°\ f(x'^{v})(x^{v})(x')(x'')(x''')$,
$Z^{v} = 97.°\ f(x^{v})(x')(x'')(x''')(x'^{v})$.

Chiamata α una delle radici quinte immaginarie della unità, per le proprietà di somiglianti radici, supposto

$Z' = \sqrt[5]{M}$, avremo
$Z'' = \alpha Z'$, $Z''' = \alpha^2 Z'$, $Z'^{v} = \alpha^3 Z'$, $Z^{v} = \alpha^4 Z'$, e però

(IV.) $Z' = \frac{1}{\alpha} Z''$, $Z' = \frac{1}{\alpha^2} Z'''$, $Z' = \frac{1}{\alpha^3} Z'^{v}$, $Z' = \frac{1}{\alpha^4} Z^{v}$, ossia a cagione di $\alpha^5 = 1$, $Z' = \alpha^4 Z''$, $Z' = \alpha^3 Z'''$, $Z' = \alpha^2 Z'^{v}$, $Z' = \alpha Z^{v}$; e queste Z', Z'', Z''', Z'^{v}, Z^{v} saranno necessariamente disuguali fra loro, tali fra loro essendo le α, α^2, α^3, α^4, 1.

17. Se una delle Z'', Z''', Z'^{v}, Z^{v} conserva il proprio valore sotto una qualsiasi permutazione fra alcune o tutte le sue radici, per la permutazione medesima fra le medesime radici, benchè poste in luoghi diversi, non cambierà di valore neppure la Z'.

Supponghiamo, che fra le supposte Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, Z^{v} per esempio la Z''' mantenga il proprio valore per una permutazione qualunque per esempio per quella fra tutte e tre le x'', x^{v}, x^{v}. Se, mentre si cangiano tra loro nell' accennata maniera le accennate x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, non cangiasi la Z''; è chiaro, che alla mutazione istessa fra le stesse x''', $x^{\prime v}$, x^{v} non si cambierà neppure la quantità $\alpha^3 Z'''$, e però la $Z = \alpha^3 Z'''$ (n.° prec.); ma ciò stesso si dice, qualunque altro caso voglia supporsi. Dunque ec.

18. Se il coef. M della $Z^5 - M = 0$ si vuol, che non abbia più di due valori tra lor disuguali, la radice Z' della supposta Equazione dovrà conservare il proprio valore per la permutazione fra tutte e tre le x', x'', x'''.

Avendosi $M = Z'\ Z'\ Z''\ Z^{\prime v}\ Z^{v}$, sarà M una funzione razionale delle x', x'', x''', $x^{\prime v}$, x^{v}; e poichè essa non à per la ipotesi più di due valori tra lor differenti, questi pel (n.° 14) saranno quei, che corrispondono ai risultati (II). Posto adunque che la M abbia soltanto tai due valori, i valori della Z corrispondenti, e tra lor disuguali velesi, che saranno i soli dieci delle prime due file in (C). Ora supponghiamo di permutare in $Z' = 1.° f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$ la x' in x'', la x'' in x''', e la x''' in x': se non si vuole che sotto questo cambiamento la Z' conservi il valor proprio, il risultato $f(x'')(x''')(x')(x^{\prime v})(x^{v})$, che ne viene, e che chiamerò Z^{x}, dovrà uguagliare uno dei nove valori Z'', Z''', ec. Z^{x}, che restano della Z: se ciò non fosse, la Z avrebbe più di dieci valori diversi contro quel, che abbiamo detto. Uguaglisi pertanto in primo luogo il risultato $Z^{x\prime}$ ad una delle radici Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, Z^{v}, per esempio alla $Z^{\prime v}$; quindi avremo $Z^{x\prime} = \alpha^3 Z'$ (n.° 16). Rinoviamo sopra $Z^{x\prime} = f(x'')(x''')(x')(r^{\prime v})(x^{v})$ il cambiamento medesimo di x' in x'', di x'' in x''', e di x''' in x', e chiamiamo $Z^{x\prime\prime}$ il risultato $f(x''')(x')(x'')(x^{\prime v})(x^{v})$, che ne viene. Ora nella maniera istessa con cui da Z' è nato $Z^{x\prime}$, così da $Z^{x\prime}$ è nato $Z^{x\prime\prime}$, ma dalla prima di queste operazioni ci è risultato per la ipotesi $Z^{x\prime} = \alpha^3 Z'$; dunque la forma della $Z^{x'}$ essendo perfettamente simile a quella della Z', dalla operazione seconda ci dovrà risultare $Z^{x''} = \alpha^3 Z^{x'}$. Ripetasi la permutazione medesima sopra di $Z^{x''} = f(x''')(x')(x'')(x^{'v})(x^{v})$: per la ragione ora accennata il risultato, che quindi producesi, dovrà essere $= \alpha^3 Z^{x''}$; ma tal risultato non è che $f(x')(x'')(r''')(x^{'v})(x^{v}) = Z'$; dunque sarà $Z' = \alpha^3 Z^{x''}$. Ora dalle due equazioni $Z^{x'} = \alpha^3 Z'$, $Z^{x''} = \alpha^3 Z^{x'}$ si ricava $Z^{x''} = \alpha^6 Z'$. Dunque sostituendo, avremo $Z' = \alpha^9 Z'$, e però, dividendo per $Z' = \alpha^5 Z'$, avremo $1 = \alpha^4$; ma ciò è impossibile (n.° 16). Dunque sarà eziandio impossibile, che risulti $Z^{x'} = Z^{v}$.

2.° Vogliasi, che la $Z^{x'}$ uguagli una delle altre radici $Z^{v'}$, $Z^{v''}$, $Z^{v'''}$, $Z^{'x}$, Z^{x}: in questa ipotesi o si vuole, che la $Z^{x''}$ sia uguale ad una delle Z'', Z''', $Z^{'v}$, Z^{v}, o che sia uguale ad una delle $Z^{v'}$, $Z^{v''}$, ec. Z^{x}.

Succeda il primo di questi casi, e sia per esempio $Z^{x''} = Z'''$, e però $Z^{x''} = \alpha^2 Z'$ (n. 16): rinovando sopra $Z^{x''}$ la stessa permutazione, per cui da Z' si è prodotta essa $Z^{x'}$, e replicando il medesimo precedente raziocinio, vedremo dover risultare $Z^{x'} = \alpha^2 Z^{x''}$, e così da $Z^{x'}$ doversi ottenere $Z' = \alpha^2 Z^{x'}$, onde con la sostituzione avremo $Z' = \alpha^6 Z'$, e però $1 = \alpha$; il che non può essere (n. 16).

Succeda il secondo degli accennati casi, e sia per esempio $Z^{x'} = Z^{v''}$, $Z^{x''} = Z^{v'''}$. Lo stesso rapporto, che esiste fra le Z'. Z'', ec Z^{v}, esistendo ancora fra le $Z^{v'}$, $Z^{v''}$, ec. Z^{x}, si avrà $Z^{v''} = \alpha Z^{v'}$, $Z^{v'''} = \alpha^2 Z^{v'}$, $Z^{'x} = \alpha^3 Z^{v'}$, $Z^{x} = \alpha^4 Z^{v'}$, e però avremo $Z^{v''} = \alpha Z^{v''}$, onde a cagione di $Z^{x'} = Z^{v'}$, e di $Z^{x''} = Z^{v'''}$ sarà $Z^{x''} = \alpha Z^{x'}$. Ora col replicare la stessa permutazione, per cui da $Z^{x'}$ siamo passati alla $Z^{x''}$, e col ripetere il precedente discorso, ottienesi successivamente $Z' = \alpha Z^{x''}$, $Z^{x'} = \alpha Z'$. Dunque. col sostituire risultandoci $Z^{x'} = \alpha^3 Z^{x'}$; ne verrà $1 = \alpha^3$, il che nuovamente è un assurdo.

Ora a qualunque altra delle Z'', ec. Z^{v} vogliasi, che si uguagli nella prima delle esposte ipotesi la $Z^{x'}$, e nel primo caso della ipotesi seconda la $Z^{x''}$, e qualunque altre siansi nel caso secondo della seconda supposizione le due fra le Z^{v}, ec. Z^{x}, a cui voglionsi uguali le $Z^{x'}$, $Z^{x''}$; sempre con lo stesso raziocinio trovasi, che ne risulta l'assurdo di $1 =$ ad una delle α, α^{2}, α^{3}, α^{4}, e ciò per essere il 5 numero primo con il 3, e perchè in fine sempre si ricava $Z' = \alpha^{3p} Z'$, oppure $Z^{x'} = \alpha^{3p} Z^{x'}$, in cui $p < 5$. Dunque non potendo la $Z^{x'}$ uguagliare veruna delle Z'', Z''' ec. Z^{x}, ne segue, che dovrà essere $Z^{x'} = Z$; e però ec.

1.° Nella presente supposizione la Z' conserverà sempre il proprio valore, qualunque siansi fra le x', x'', x''', $x^{'v}$, x^{v} le tre radici, che vengon comprese nella supposta permutazione, e ciò si dimostra affatto, come precedentemente.

2.° Il Teorema medesimo è facile a vedersi, che si verifica eziandio, mentre si voglia, che i ris^{i} Z', Z'', Z''', $Z^{'v}$, Z^{v} radici della $Z^{5} - M = 0$ nascan l'uno dall'altro per un' altra permutazione semplice di 1.° genere fra tutte e cinque le x', x'', x''', $x^{'v}$, x^{v} diversa dalla supposta nel (n.° 16); e ciò perchè anche in questo caso si verificano le Equazioni (IV).

19. Il coefficiente M della $Z^{5} - M = 0$ deve avere un numero > 2 di valori disuguali fra loro.

Se ciò si nega, la Z' dovrà conservare il proprio valore per la permutazione fra tutte e tre le radici x', x', x''' (n.° prec.), e, ritenute le denominazioni precedenti, avremo $Z' = Z^{x'}$. In conseguenza di ciò la radice $Z''' = f(x''')(x^{'v})(x^{v})(x')(x'')$ non cangerà di valore alla mutazione fra le x''', $x^{'v}$ x^{v} (5.° Intr.); ma se la Z''' resta la medesima pel cambiamento fra queste x''', $x^{'v}$, x^{v}, pel cambiamento fra le stesse x''', $x^{'v}$, x^{v} deve rimanere la medesima anche la Z' (n.° 17). Dunque mantenendo la Z' il proprio valore eziandio per la permutazione fra le radici degli ultimi tre luoghi, per la permutazione istessa manterrà il proprio ancora la $Z^{x'} = f(x'')(x''')(x')(x^{'v})(x^{v})$ (5.° Intr.), e però avremo $Z^{x'} = f(x'')(x''')(x')(x^{'v})(x^{v}) = f(x'')(x''')(x^{'v})(x^{v})(x')$; ma $Z^{x'} = Z'$; dunque sarà ancora $Z' = f(x'')(x''')(x^{'v})(x^{v})(x')$, e quindi $Z' = Z''$ (n.° 16); ma pel citato (n.° 16) questo è im-

impossibile. Dunque sarà ancora impossibile, che la nostra M non abbia un numero $>$ 2 di valori disuguali.

20. Lo stesso coefficiente M della $Z^5 - M = o$ avrà un numero maggiore di 5 di valori differenti fra loro.

A cagione di essere $M = Z' Z'' Z''' Z^{'v} Z^{v}$, sarà M una funzione razionale delle x', x'', x''', $x^{'v}$, x^{v}, la quale conserva il proprio valore alla permutazione, per cui in (C) formansi i risultati della prima linea; imperciocchè per tale permutazione la Z' cambiasi nella Z'', la Z'' nella Z''', la Z''' nella Z^{v}, la Z^{v} nella Z^{v}, e la Z^{v} nella Z', e al cambiamento reciproco fra queste Z', Z'', Z''', $Z^{'v}$, Z^{v} il prodotto $Z' Z'' Z''' Z^{'v} Z^{v} = M$ non cambiasi punto. Dunque i risultati, che nascono dalla M per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^{v} essendo tra loro uguali a 5 a 5 (n.° 9), ne viene, che il numero de' suoi valori diversi dovrà essere uguale, o summultiplo di $\frac{120}{5} = 24$, e però non $= 5$; ma lo stesso numero non può uguagliare nè il 3, nè il 4 (n.° 14), e pel (n.° prec.) dev' essere $>$ 2. Dunque ec.

21. L' Equazione da cui dipendono tutti i valori di M, non potrà essere della forma $M^p + V = o$.

Supposto pel (n.° prec.) $M = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{'v})(x^{v})$, e cambiata in (C) la f in φ, poichè è questa una funzione, che mantiene il proprio valore per la permutazione, onde in (C) dal 1.° si genera il ris.° 25.° (n.° prec.), i differenti suoi valori pel (n.° 9) verranno tutti compresi tra i 24 della prima colonna verticale in (C).

Ora chiamiamo α una delle radici *pesime* della unità scelta opportunamente, affinchè le successive potenze α, α^2, α^3, α^4, ec. $\alpha^p = 1$ tutte esprimano le radici della $a^p - 1 = o$; e siano M', M'', M''', ec. $M^{(p)}$ tutte le radici della $M^p + V = o$: per la proprietà delle radici della unità tutte le α, α^2, α^3, α^p saranno disuguali fra loro, e moltiplicando successivamente per cadauna di esse la M' tutte ci risulteranno le radici della $M^p + V = 0$ onde supporrò $M'' = \alpha M'$.

Ciò posto poichè pel (n.° prec.) i valori della M sono in un numero > 5, e vengono tutti compresi tra i 24 della prima colonna in (C) ; essa M dovrà cambiar di valore per una, o più delle permutazioni , che far si ponno nella $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$ tra le x' , x'' . x''' , x^{iv} (n. 8).

1.° Supponghiamo pertanto, che lo cambi sotto la permutazione, onde dal ris.° $\varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$ nasce l'altro $\varphi(x'')(x''')(x^{iv})(x')(x^{v})$, e supponghiamo il primo di questi $= M'$, il secondo $= M''$; giacchè ripetendo quanto si può la permutazione medesima, dal secondo di questi risultati ci nascono gli altri due $\varphi(x''')(x^{iv})(x')(x'')(x^{v})$, $\varphi(x^{iv})(x')(x'')(x''')(x^{v})$, chiamiamo questi $M^{(h)}$, $M^{(k)}$. Ora nella maniera medesima, con cui dalla M' si è prodotta la funzione M'', così dalla M'' si è prodotta la $M^{(b)}$, e dalla $M^{(h)}$ la $M^{(k)}$, e da questa $M^{(k)}$ ritorna la M' ; dunque, avendosi per la supposizione $M'' = \alpha M'$, per le ragioni istesse, che abbiamo indicate nel (n.° 18), dovrà essere $M^{(b)} = \alpha M''$, $M^{(k)} = \alpha M^{(b)}$, $M' = \alpha M^{(k)}$, e quindi sostitnendo, ci risulterà $M'' = \alpha M'$, $M^{(b)} = \alpha^2 M'$, $M^{(k)} = \alpha^3 M'$, e finalmente $M' = \alpha^4 M'$ d'onde si ricava $1 = \alpha^4$.

La permutazione , per cui abbiamo supposto , che dalla M' nasca la M'', è semplice di 1.° genere. Dunque il numero dei risultati M' , M'' , $M^{(b)}$, $M^{(k)}$ uguaglierà il numero delle radici x' , x'' , x''' , x^{v} , che entrano in tale permutazione (7.° Intr.) ; ma questo numero di radici comprese nella nostra permutazione, qualunque essa siasi , non può mai essere > 4, perchè le sole x' , x'' , x''' , x^{iv} col cambiarsi fra loro ci danno in (C) i 24 risultati della prima colonna . Dunque ancora il numero dei risultati M', M'', $M^{(b)}$, $M^{(k)}$, e però l' esponente della α nell' equazione ottenuta $1 = \alpha^4$, dovrà non essere > 4 ; ma pel (n.° prec.) $4 < p$: dunque dovendo essere $< p$ eziandio l' esponente della α nella

1 =

$1 = \alpha^4$, ne segue, che questa sarà un' Equazione impossibile.

2.° Cambisi la M di valore per una permutazione fra le x', x'', x''', $x^{'v}$ semplice di 2.° genere, e sia $M' = \varphi\,(x''')\,(x^{'v})\,(x')\,(x'')\,(x^{v})$. Quì pure a cagione di essere $M'' = \alpha M'$, ripetendo la stessa permutazione sulla M'', ne viene $M' = \alpha M''$. Dunque col sostituire otterremo $M' = \alpha^2 M'$, e però $1 = \alpha^2$.

In questo secondo caso il numero dei risultati M', M'' deve essere sempre $= 2$; perchè sotto una permutazione semplice di 2.° genere, qualunque essa vogliasi, le x', x'', x''', $x^{'v}$ nel cangiarsi fra loro contemporaneamente, non si possono prendere mai, che a due a due. Dunque l' esponente di α nell' Equazione risultata essendo sempre $= 2$, e però $< p$, ne viene, che anche questa $1 = \alpha^2$ sarà un' Equazione assurda.

Ora rifletto in generale, che qualunque siansi i due risultati della $\varphi\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{'v})\,(x^{v})$ tra lor differenti, dai quali si rappresentano i due valori M', $M'' = \alpha M'$, sempre può eseguirsi il discorso dei (1.°, e 2.° prec.), perchè nel passare dall' uno all' altro di essi à sempre luogo una permutazione fra alcune, o tutte le x', x'', x''', $x^{'v}$ semplice di 1.°, o di 2.° genere (8.° Intr.). Dunque risultandoci sempre in fine un' Equazione impossibile, ne segue, che sarà ancora impossibile l' Equazione $M^p + V = 0$.

22. L' Equazione, da cui dipendono tutti i valori di una quantità Q, non può essere della forma $Q^p + V = 0$, mentre essa Q sia una funzione delle x', x'', ec. x^{v}, la quale conservi il proprio valore per una permutazione semplice di 1.° genere fra tutte e cinque queste radici, e mentre abbiasi $p > 2$.

Fatto come nel (n.° prec.) $Q = \varphi\,(x')(x'')(x''')(x^{'v})(x^{v})$, si effettui su di questa funzione, e si replichi quanto si vuole, la permutazione ora supposta; quindi non verrà mai a prodursi alcuno dei risultati, che corrispondono in (C) ai 24 della prima colonna verticale, perchè questi contengono tutti la x^{v} in fine, ed i quattro nati nel nostro caso dalla $\varphi\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v}) = Q'$ non ve la possono contenere (7.° Intr.). Lo stesso succede in egual modo, mentre si effettui la nostra permutazione sopra qualunque altro dei valori della Q, che corrispondono in (G) ai n.$^{\text{i}}$ 2.°, 3.°, 4.°, ec. 24.°. Dunque l' ugnaglianza, che per l' esposta permutazione succede fra tutti i 120 valori della Q, dovendo comprenderli a 5 a 5, e dovendo quindi ridurre i valori fra loro diversi ad un numero uguale o summultiplo di $\frac{120}{5} = 24$, sarà sì, che tali valori diversi verran tutti compresi fra i 24 della prima colonna verticale.

Ora, ciò essendo, e a cagione di $p > 2$, essendo $p > 4$ (n.° 14), lo stesso raziocinio, e le stesse conseguenze, che nel (n.° prec.) ànno avuto luogo sulla M, l' ànno egualmente sulla Q. Dunque ec.

23. Supposta un' Equazione $y^5 = Q$, in cui Q possa avere uno, o più valori diversi, e di cui $y' = f\,(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$ sia radice, io dico che chiamata $y^{(a)}$ un' altra qualunque delle sue radici, la $y^{(a)}$ deve nascere dalla y', per una permutazione semplice di 1.° genere fra tutte e cinque le x', x'' ec. x^{v}.

Se ciò si nega, supponghiamo, che $y^{(a)}$ proceda da y', cambiandosi contemporaneamente fra loro le x', x'', e fra loro le x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, cosicchè si abbia $y^{(a)} = f(x'')(x')(x^{\prime v})(x^{v})(x''')$. A cagione della forma $y^5 = Q$ dovrà essere $y^{(a)} = \alpha y'$ rappresentandosi con α una delle radici quinte immaginarie dell' unità (n.° 16); dunque sarà $y^{(a)} = f\,(x')\,(x')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\,(x''') = \alpha y' = \alpha\, f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})$. Rinovando sulla $y^{(a)}$ la permutazione ora supposta, e replicandola quanto si può, facciamo $y^{(b)} = f\,(x')(x'')(x^{v})(x''')(x^{\prime v})$, $y^{(c)} = f\,(x')(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$,

$y^{(a)}$

$y^{(d)} = f(x')(x'')(x^{iv})(x^{v})(x''')$, $y^{(e)} = f(x'')(x')(x^{v})(x''')(x^{iv})$, e si eseguisca quì pure il discorso de' (n. 18, 21); vedesi, che, come si à $y^{(a)} = \alpha y'$, così deve essere ancora $y^{(b)} = \alpha y^{(a)}$, $y^{(c)} = \alpha y^{(b)}$, $y^{(d)} = \alpha y^{(b)}$, $y^{(e)} = \alpha y^{(d)}$, $y' = \alpha y^{(e)}$, e per conseguenza con la sostituzione successiva otterremo $y' = \alpha^6 y'$, e però $1 = \alpha$, il che è impossibile. Ora qualunque altra siasi la permutazione, per cui la $y^{(a)}$ nasce dalla y', mentre questa non vogliasi semplice di 1.° genere fra tutte le x', x'' ec. x^{v}, a cagione di essere il 5 numero primo, sempre ne viene la medesima conseguenza. Dunque ec.

24. Supposto nell' Equazione razionale (E) $n = 5p$, in cui p sia numero intero, e positivo, sarà impossibile, che essa (E) acquisti la forma $y^{5p} + V = 0$.

Facciamo $y^5 = Q$, ne verrà $Q^p + V = 0$. La y deve essere una funzione delle x', x'' ec. x^{v}, che cambii di valore per la permutazione, onde in (C) dal 1.° nasce il ris.° 25.°; se ciò non fosse i risultati (C), e però i valori della y pel (n.° 9) sarebbero uguali fra loro a 5 a 5, e però diventando n uguale, o summultiplo di $\frac{120}{5} = 24$ (n.° 13), non sarebbe più n multiplo di 5, ossia $= 5p$. In conseguenza di ciò, io dico, che deve essere $p > 2$: imperciocchè se si volesse $p = 1$; allora i valori della y dovendo diventare solamente cinque, non potrebbero essere, che i cinque risultati della prima fila in (C), e quindi sulla $y^5 + V = 0$ si applicherebbero gli stessi Teoremi de' (n. 17, 18).

Che se si voglia $p = 2$; chiamati in tal caso Q', Q'' ec. Q^{v}, y', y'' ec. y^{v} i valori della Q, e della y corrispondenti ai risultati della prima fila in (C), e $Q^{v'}$, $Q^{v''}$ ec. Q^{x}, $y^{v'}$, $y^{v''}$ ec. y^{x} i corrispondenti ai risultati della fila seconda, dovrà essere $Q' = Q''$; se ciò non si volesse diventando tutti fra loro disuguali i risultati Q', Q'', ec. Q^{v} (n.° 9), allora i diversi valori della Q, e però il numero p sarebbe > 2 contro ciò, che abbiamo supposto. Essendo adunque $Q' = Q'' = ec = Q^{v}$, $Q^{v'} = Q^{v''} = ec. = Q^{x}$ (n.° 9), e pel (n.° 11) dovendo risultare Q' diverso da Q^{v}, questi $Q', Q^{v'}$ saranno le due radici della $Q^2 + V = 0$, e però avendosi $Q' = \sqrt{-V}$, $Q^{v'} = \sqrt{-V}$, la $y^{10} + V = 0$ si ridurrà alle due $y^5 - Q' = 0$, $y^5 - Q^{v'} = 0$. Ma y', y'' ec. y^{v} sono i valori della y corrispondenti ai $Q' = Q'' = ec. = Q^{v}$, ed $y^{v'}$, $y^{v''}$, ec. y^{x} i corrispondenti ai $Q^{v'} = Q^{v''} = ec. = Q^{x}$. Dunque i primi tra questi dovranno essere le radici della $y^5 - Q' = 0$, ed i secondi le radici della $y^5 - Q^{v'} = 0$. Dunque ancora sulla $y^5 - Q' = 0$ applicandosi gli stessi Teoremi dei (numeri 17, 18), ne viene come nel (n.° 19), che il numero dei valori della Q, e però il p dovrà essere > 2. Ora, ciò essendo, sopra della $Q^p + V = 0$ à luogo il Teorema del (n.° 22), perchè la funzione Q pel (n.° prec.) deve conservare il proprio valore per una permutazione semplice di 1.° genere fra tutte e cinque le x', x'', ec. x^{v}. Dunque risultando impossibile l' Equazione della forma $Q^p + V = 0$, sarà impossibile ancora l'altra supposta $y^{5p} + V = 0$.

Dal presente raziocinio si vede, che in un' equazione $y^5 - Q = 0$, il numero dei valori della Q sempre dovrà essere > 2, qualunque siasi la permutazione semplice di 1.° genere fra tutte le x', x'', ec. x^{v}, per cui la y'' nasce dalla y'; e con raziocinio simile a quello del (n.° 20) vedremo, che questo numero dei valori diversi della Q deve essere pur' anche > 5.

25. Data a risolversi un'equazione algebraica determinata

(F) $$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + ec. + V = 0,$$

o questa è tale, che può immediatamente ridursi alla forma

(V) $$(x + b)(x^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + ec.) = 0,$$

oppure all' altra

(VI) $$(x + a)^m + b = 0,$$

in cui $a, b, c, d,$ ec. siano funzioni razionali dei coefficienti della (F), o non è capace di simile riduzione. Nella prima di queste ipotesi potremo sempre avere immediatamente uno dei valori della x soltanto con la divisione, o con l' estrazione della radice *mesima*; poichè, eseguita questa operazione, e trasportati i termini cogniti nel secondo membro, sarà nel primo caso $x' = -b$, e nel secondo $x' = -a + \sqrt[m]{-b}$. (*) Ora prescindendo dall' indicato trasporto de' termini cogniti, osservo, che tra le sei operazioni algebraiche altra non ve n' à, che praticata su di un' Equazione (F) possa da se sola

---

(*) Dopo l' esame de' principali metodi per la risoluzione algebraica delle Equazioni l' immortale Lagrange stabilisce (Reflex. sur la Résolut. algebr. des Equat. Sect. 4. n.° 86. Memoir. de Berl. an. 1771.), che l' arte di sciogliere le Equazioni consiste nello scuoprire delle funzioni fra le radici della Equazione proposta tali, che 1.° la Equazione, o le Equazioni, dalle quali dipendono, trovinsi di grado minore di quello della proposta, o almeno scomponibili in altre di minor grado; 2.° dalle quali possansi in seguito dedurre i valori delle radici cercate.

Appoggiati a questo principio abbiamo nella Memoria sulla Risoluzione algebraica delle Equazioni particolari (numeri 12., 20. e seguenti Tom. 9.° Società Italiana) considerato come indeterminabile il valore di quelle funzioni, le quali dipendono da Equazioni irreducibili ad altre di grado inferiore, e il grado delle quali sia non $< m$, essendo $m > 4$ l' esponente dell' Equazioni date: ma tali Equazioni, quantunque di grado non $< m$ potendo essere dotate della forma (VI), o essere riducibili ad altre parimenti di grado non $< m$, e fornite della stessa forma (VI), e potendosi in tal caso ottenere un valore della funzione, senza riduzione ulteriore; ne segue, che simile considerazione non è generale abbastanza. Quindi diremo, che l' indicata Memoria, non terminata per anche, finora non riguarda, che la soluzione di tutte quelle Equazioni, le quali in conseguenza di un rapporto particolare fra le radici sono capaci di un opportuno abbassamento.

la darci immediatamente un valore della x, se non la divisione, e l' estrazione della radice, poichè per queste sole l' esponente della x può diventar minore; e osservo inoltre, che la divisione, e l' estrazione della radice non possono immediatamente aver luogo sulla (F), e darci immediatamente la x al grado 1.°, se non quando essa (F) à corrispondentemente una delle forme (V), (VI). Dunque nell' ipotesi seconda, mentre cioè la (F) non può tosto ridursi alla forma (V), oppure alla (VI), non potremo avere alcuno dei valori della x, se non che riducendo la (F) ad altra Equazione, la quale abbia per incognita la x medesima, od altra lettera, e la quale sappia risolversi, e possa in seguito con le sue radici somministrare immediatamente, o mediatamente alcune, o tutte le radici della proposta.

26. Sia

(VII) $$z^n + Mz^{n-1} + Nz^{n-2} + \text{ec.} = 0$$

l' Equazione, a cui supponghiamo in questa seconda ipotesi, che venga ridotta la (F), e dalle cui radici ottenute possansi dedurre in seguito i valori della x. Questa (VII) o è capace essa pure di ricevere giusta il (n.° prec.) una delle forme (V), (VI), o non lo è; se lo è, otterremo immediatamente nella maniera indicata uno dei valori della z; e se non lo è, per avere un simil valore converrà trasformare la (VII) in un' altra

(VIII) $$y^p + Py^{p-1} + Qy^{p-2} + \text{ec.} = 0,$$

le cui radici determinate ci possano somministrare le radici della (VII). Rinuovo sulla (VIII) lo stesso discorso, e se questa Equazione può acquistare una delle solite forme (V), (VI), allora avremo tostamente il valore di una delle sue radici; se nò, per ottenerlo, converrà ridurre tale Equazione ad un'altra

(IX) $$u^q + Ru^{q-1} + Su^{q-2} + \text{ec.} = 0,$$

dalle radici della quale possansi ricavare i valori della u. Lo stesso si dice della (IX), e di tutte le altre Equazioni, che possonsi ottenere successivamente.

Quindi si vede, che, qualunque siasi la (F), se essa non à una delle forme (V), (VI), e se d'altronde è capace di soluzione, converrà necessariamente, che sia riducibile ad altre Equazioni (VII), (VIII), (IX), ec., l' ultima delle quali sia capace di ricevere una delle forme accennate: se ciò non fosse, dovremmo continuare la serie delle trasformate (VII), (VIII), (IX) ec. all'infinito, e mai non giungeremmo ad ottenere un valore algebraico determinato, per mezzo del quale si possa poscia scuoprire, ascendendo, qualcuna delle radici della (IX), della (VIII), della (VII), e finalmente della (F).

27. Supponghiamo, che la (VII) sia dotata di una delle indicate forme (V), (VI), e che quindi si ricavi $z = \mathrm{H}$. Divisa tale Equazione pel binomio $z - \mathrm{H}$, otterremo per quoto un' Equazione $z^{n-1} + \text{ec.} = 0$. Su di questa replicandosi gli stessi precedenti raziocinii, si vede, che non potremo ottenere qualche altro valore della z, se non mentre la $z^{n-1} + \text{ec.} = 0$ od abbia per se medesima, o sia trasformabile in altra Equazione avente una delle solite forme; e lo stesso si dice in seguito.

28. Supposta la (F) un' Equazione generale, il primo membro della (VII) non può avere alcun fattore $z^r + az^{r-1} + bz + u$, in cui r sia un numero intero $< n$, e $> o$, e i coefficienti a, ec. t, u siano funzioni razionali dei cofficienti M, N, ec.

Essendo i coeficienti a, ec. t, u funzioni razionali degli altri M, N, ec. dovranno per la generalità della (F), e quindi per la generalità degli stessi M, N, ec., essere funzioni delle radici della (VII) tali, che non cambieran di valore, qualunque permutazione si faccia tra le z', z'', ec $z^{(n)}$, così chiamate le radici della (VII). Ora con le prime r tra queste, cioè con le z', z'', ec. $z^{(r)}$ si rappresentino le radici della $z^r + az^{r-1} + \text{ec.} + tz + u = 0$: niuna di esse può essere uguale ad alcuna delle restanti $z^{(r+1)}$, $z^{(r+2)}$, ec. $z^{(n)}$, perchè si suppone, che la (VII) e per la natura delle trasformate (4.° Intr.), e per la generalità della (F) non abbia per radici, che i valori della $z = f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m)})$ tra loro diversi. Dunque nessuno di questi ultimi valori $z^{(r+1)}$, ec. potendo essere radice della $z^r + az^{r-1} +$ ec. $+ tz + u = 0$; ne segue, che, se in luogo di z porrò la quantità $z^{(r+1)}$, il risultato $z^{(r+1)r} + az^{(r+1)r-1} +$ ec. $+ tz^{(r+1)}$ non potrà diventare $= -u$. Ora nascendo la $z^{(r+1)}$ dalla z' per una determinata permutazione fra le x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, per la permutazione medesima nasce evidentemente ancora il risultato $z^{(r+1)r} + az^{(r+1)r-1} +$ ec., $+ tz^{(r+1)}$ dall' altro $z'^r + az'^{r-1} +$ ec. $+ tz'$. Dunque questa quantità $z'^r + az'^{r-1}$ $+$ ec. $+ tz'$, e quindi la $-u$, che l' uguaglia, sarà una funzione delle x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, la quale per l' indicata permutazione cambierà di valore; ma ciò non può essere, perchè il coefficiente u deve conservare il proprio valore sotto quelle permutazioni fra le x', x'', ec. $x^{(m)}$, sotto cui lo conservano i coefficienti M, N ec. e questi nella sovraesposta permutazione non cambian valore, perchè tanto la z' come la $z^{(r+1)}$ sono radici della (VII). Dunque non potrà neppur essere, che ec.

Dunque, mentre la (F) sia Equazione generale, è impossibile, che una qualunque sua trasformata (VII), in cui $n > 1$, sia capace giusta il (n.° 25) di ricevere la forma (V).

29. Noi non sappiamo risolvere le Equazioni algebraiche di forma diversa dalla (V), (VI), se non quando tali Equazioni siano di grado < 5, o trasformabili in altre di grado parimenti < 5, oppur dotate di una delle forme accennate. Dunque se nella (F) supposta non riducibile giusta il (n.° 25) alle forme (V), (VI) abbiamo $m > 4$, non potremo mai avere la soluzione di tale Equazione, se non trasformandola o immediatamente, o mediatamente in un' altra di grado < 5,

o in un' altra, che sia capace di ricevere nella solita maniera una delle indicate forme.

30. Data sia a risolversi l' Equazione (D). Essendo questa generale (n.° 13), e però prescindendo da qualunque valore particolare, e da qualunque particolare rapporto fra le sue radici, non potrà ricevere secondo il (n.° 25.) nè l' una, nè l' altra delle forme (V), (VI), nè potrà avere alcun fattore razionale, e però non ne potremo avere la soluzione, se non che dipendentemente da una trasformata, dalle cui radici possansi ricavare i valori della x. Tal trasformata venga rappresentata dalla (VII): pel (1.° Intr.) dovrà essere $z = f(x')(x'')(x''')(x'^{v})(x^{v})$, e supposta questa pel (3.° Intr.) una funzione algebraica razionale, i suoi valori diversi dipenderanno dalla diversità dei risultati, che ottengonsi per tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', x'^{v}, x^{v} (2.° Intr.).

31. Supposta la precedente z quella funzione, dipendentemente dalla quale deggiono immediatamente determinarsi i valori della x, e chiamati z', z'', z''', z'^{v}, z^{v} i valori diessa z corrispondenti ai cinque risultati, che nascono dalla z' per una qualunque permutazione semplice di 1.° genere fra tutte e cinque le x', x'', x''', x'^{v}, x^{v}; io dico, che questi z', z'', ec. z^{v} deggiono essere tutti disuguali fra loro.

Se ciò non fosse, posto per esempio $z' = z''$, con raziocinio perfettamente simile a quello del (n.° 9.), troveremo, che a cagione di essere il 5 numero primo, deve risultare $z' = z'' = z''' = z'^{v} = z^{v}$ (5.° Intr.). Ora dovendo i valori della x dipendere da quelli della z, supposto, che le z'. z'', ec. z^{v} ci esprimano per esempio i cinque risultati della prima fila in (C), e supposto che per esempio la $x' = x' + 0\,(x''\,x'''\,x'^{v}\,x^{v})$ dipenda da z', la $x'' = x'' + 0\,(x'''\,x'^{v}\,x^{v}\,x')$ dipenderà da z'', la $x''' = x''' + 0\,(x'^{v}\,x^{v}\,x'\,x'')$ da z''', la $x'^{v} = x'^{v} + 0\,(x^{v}\,x'\,x''\,x''')$ da z'^{v}, e la $x^{v} = x^{v} + 0\,(x'\,x'\,x'''\,x'^{v})$ da z^{v}. Dunque nella ricerca della x' dalla z', a cagione di essere $z' = z'' =$ ec. $= z^{v}$, saremo pel

(10.°

(10.° Intr.) necessariamente portati a dovere sciogliere una Equazione, di cui le x', x'', ec., x^{v} siano tutte radici, che è quanto dire a dovere sciogliere la stessa data Equazione (D), ma ciò è quello, che non sappiamo, e che si domanda; e lo stesso raziocinio per la natura delle permutazioni semplici di 1.° genere (6.°, 7.° Intr.) à sempre luogo. Dunque ec.

32. Pertanto nella (VII) sarà l' esponente n uguale o multiplo di 5. Imperciocchè se tale non fosse, risultando n uguale o summultiplo di $\frac{120}{5} = 24$ (2.° Intr.), esisterebbe una permutazione, per cui i valori della z sarebbero tra loro uguali a cinque a cinque; ma essendo solamente cinque le radici x', x'', ec. x^{v}, che compongono la funzione z, ed essendo il 5 numero primo, tale uguaglianza non può succedere, che dipendentemente da una permutazione semplice di 1.° genere fra tutte le x', x'', ec., x^{v}; dunque per questa permutazione dovrebbe la z conservare il proprio valore, il che è contro del (n.° prec.). Supposto adunque $n = 5k$, la (VII) diverrà

(X) $$z^{5k} - Mz^{5k-1} + Nz^{5k-2} + \text{ec.} = 0 ,$$

e avremo 5k uguale, o summultiplo di 120, ed i coefficienti M, N, ec. funzioni razionali (2.° Intr.) degli altri A, B, ec. della (D).

33. La nostra trasformata (X) non è suscettibile giusta il (n.° 25) nè della forma (V), nè dell' altra (VI).

Questa è una chiara conseguenza dei (numeri 24, 28).

34. Per determinare il valore della funzione z, converrà dunque ridurre la (X) ad altra Equazione, di cui conoscasi la soluzione, e dalle cui radici possansi dedurre le radici della (X) (n.° 29.). Sia la (VIII) questa nuova Equazione. Essendo la y funzione delle z', z'' ec., e le z', z'', ec. funzioni delle x', x'', ec. (1.° Intr.), sarà ancora la y funzione delle x', x'', ec. Ora o questa y si vuole tale, che

cambi di valore, qualunque permutazione semplice di 1.° genere si faccia fra tutte le x', x'', ec., x^v, oppure che lo conservi sotto qualcuna delle medesime. Nella prima di queste supposizioni ciò stesso, che si dice della (VII), ossia della (X), applicandosi eziandio sulla (VIII), ne viene, che quella medesima difficoltà, che incontrasi nella determinazione della z, s'incontra ancora nella ricerca del valore della y, e però inutil diviene la considerazione di questo caso.

Supponghiamo pertanto, che la y si conservi la stessa sotto qualcuna delle permutazioni ora indicate. Divenendo perciò i suoi valori tra loro uguali a cinque a cinque (7.°, 9.°, Intr.), l' esponente p della (VIII) sarà uguale o summultiplo di $\frac{120}{5} = 24$, e tra i risultati della prima colonna verticale in (C) tutti verran compresi i valori disuguali tra loro della y, come sappiamo dalla dimostrazione del (n.° 22.).

35. Sia $p > 2$, la (VIII) non potrà giusta il (n.° 25) acquistare nè l'una, nè l' altra delle solite forme (V), (VI).

Per riguardo alla forma (V) ciò non è che una conseguenza del (n.° 28.). Per riguardo poi alla (VI) se si volesse la (VIII) riducibile alla $(y + a)^p + b = 0$, supposto $y + a = Q$, ne verrebbe $Q^p + b = 0$, in cui b per la ipotesi è funzione commensurabile dei coefficienti della (VIII), e però qnantità razionale; ma questa $Q^p + b = 0$ pel (n.° 22) è un' Equazione impossibile. Dunque ec.

36. Nella (VIII) presentemente supposta o si vuole $p < 6$, oppure > 5: cominciam dal supporre $p < 6$. Pei (numeri 34, 14) non potendo in questo caso risultare $p > 2$, la (VIII) diverrà

$$y^2 + Py + Q = 0, \tag{IX}$$

e supposto $y = \varphi'(x')(x')(x''')(x^{'v}\ (x^v)$, e cambiata nell'annessa Tavola in (B), e (C) la f in φ, i due risultati

$$y' = \varphi'(x')(x'')(x''')(x^{'v})(x^v),\ y'' = \varphi'(x'')(x')(x''')(x^{'v})(x^v)$$

saranno le radici di questa Equazione (n.° 10.), e i dodici

risultati corrispondenti a quelli della prima fila in (I) saranno tutti $= y'$, e i dodici della fila seconda $= y''$.

37. Dai due valori della y quelli devonsi dedurre della z (n.° 34); ma 5k ci esprime il numero totale di questi ultimi (n.° 32), onde tra essi $\frac{5\,\mathrm{k}}{2}$ devon dipendere da y', ed altrettanti da y''. Dunque non essendo il 5 divisibile per 2 esattamente, e dovendo essere $\frac{5\,\mathrm{k}}{2}$ numero intiero, ne viene che, supposto $\frac{\mathrm{k}}{2} = h$, dovremo nel cercare z' da y' necessariamente cadere in un' Equazione di grado multiplo del 5 (12.° Intr.), e che chiamerò $5h$. Sia

$$z^{5h} + gz^{5h-1} + \text{ec.} = 0, \tag{XII}$$

tale Equazione: le sue radici saranno i valori della z corrispondenti ad y', ed i coefficienti g ec. saranno funzioni razionali di essa y' (10.° Intr.). Ora la y' deve conservare il proprio valore sotto una delle permutazioni semplici di 1.° genere fra tutte le x', x'', ec. x^{v} (n.° 34), e sotto questa permutazione medesima la z deve cambiarsi (n.° 34). Dunque chiamati z', z'', z''', z^{iv}, z^{v} (n.° 31) i diversi valori della z, che per quest' ultima permutazione nascono da z' corrispondenti ad y', tali valori dovranno essere tante radici della (XII).

38. Determinati col mezzo della y' i coefficienti g ec., rifletto, che i modi diversi, con cui dalla (XII) può in seguito ottenersi il valore z' sono

1.° Immediatamente, volendosi che la (XII) abbia, se è possibile, secondo il (n.° 25.) una delle forme (V), (VI).

2.° Mediatamente essendo la (XII) riducibile ad una terza Equazione, dalla quale ricavisi poscia immediamente il valor z'.

3.° In fine, perchè si voglia che la terza Equazione, a cui riducesi la (XII), non possa darci il valore di z', che col mezzo di riduzioni ulteriori.

Cominciamo dal considerare il secondo di questi casi; e poichè in tale ipotesi l'Equazione ridotta deve evidentemente avere per incognita la z medesima, ed avere una delle forme (V), (VI), cominciam dal supporre che abbia la forma seguente $(z+a)^5 - M = 0$, e che $z', z'', z''', z^{iv}, z^{v}$ (n.^{i} 23, 37) siano le sue radici. Fatto $z+a=Z$ otterremo $Z^5 - M = 0$, e le sue radici chiamate $Z', Z'', Z''', Z^{iv}, Z^{v}$ saranno funzioni razionali delle x', x'', ec., x^{v} corrispondenti alle z', z'', ec. z^{v}. Fissiamo ora l' attenzione sopra il caso presente, e dopo di esso faremo le nostre riflessioni sopra degli altri.

39. Poichè la $(z+a)^5 - M = 0$ proviene dalla (XII) (n.^{o} prec.), i diversi valori della M dipenderanno dai valori dei coefficienti g, ec. della (XII); ma questi g, ec. dipendono dalla y (n.^{i} 37, 38.); dunque dalla y dipenderanno eziandio i valori della M: ora questa y à solamente i due valori y', y''. Dunque fra tutti i valori della M altri dipenderanno da y', ed altri da y''. Cambiata pertanto in (B), e in (C) la f in φ, giacchè nel modo istesso, che si è indicato nel (n.^{o} 20), si trova che la $M = \varphi(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$ è una funzione razionale, e per la dimostrazione del (n.^{o} 22) i 24 risultati della prima colonna in (C), ossia i 24 (B) tutti ci rappresentano i valori di essa M una, o più volte replicati, sì quelli che corrispondono ad y', come i dipendenti da y''; ne viene che i primi tra questi, cioè quelli che procedono da y', saranno evidentemente i corrispondenti ai dodici della prima fila in (I) (n.^{o} 5), e quelli che procedono da y'', saranno i corrispondenti ai dodici della fila seconda.

40. Supposto, che Q ci esprima una funzione algebraica razionale delle x', x'', ec., x^{v}, la quale non cambi di valore sotto una permutazione semplice di 1.^{o} genere fra tutte e cinque queste radici, io dico che corrispondente-

mente ad y' il numero dei valori tra loro differenti di essa Q non può essere che $= 12$, oppure $= 6$, oppure $= 1$.

Chiamiamo Q', Q''', Q'', Q^{iv}, Q^{v} i risultati che provengono da $Q' = F\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{iv})\,(x^{v})$ per la permutazione semplice di 1.° genere ora supposta. Essendo per la ipotesi $Q' = Q'' =$ ec. $= Q^{v}$, tutti i valori della Q fra loro diversi verranno compresi fra i 24 della prima colonna in (C) (n.° 22.), e tra questi i dodici che corrispondono a quelli della prima riga in (I) saranno i dipendenti da y' (n.° prec.). Ora questi dodici valori della Q o vogliensi tutti disuguali fra loro, o nò; se si vogliono disuguali tutti, allora il 12 esprimendone il numero, il Teorema resterà provato nella prima sua parte. Che se tra di loro vuolsi che esista una qualche uguaglianza; provenendo essi pel (n.° 7.) l' uno dall' altro solamente o per una permutazione semplice di 1.° genere fra tre delle x', x'', x''', x^{iv}, o per una di genere 2.° fra tutte e quattro queste radici; ne viene che $Q' = F\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{iv})\,(x^{v})$ dovrà mantenere il proprio valore sotto una, o più di queste ultime permutazioni.

1.° Supponghiamo che lo mantenga sotto una permutazione semplice di 1.° genere fra tre delle indicate quattro radici, per esempio fra le x', x'', x^{iv}. Tra i precedenti risultati Q', Q'', ec., Q^{v} due ne esistono evidentemente, in niuno de' quali la x^{v} occupa alcuno dei luoghi occupati in Q' dalle tre radici supposte, cioè nel nostro esempio alcuno dei luoghi 1.°, 2.°, 4.° (7.° Intr.); ed uno di questi risultati essendo Q', ponghiamo che Q''' sia l' altro. Per la natura della permutazione semplice di 1.° genere, onde Q''' nasce da Q', e per essere il 5 numero primo, le radici che esistono negli indicati tre posti di Q''' non potendo essere in tutto le stesse x', x'', x^{iv} esistenti ne' luoghi medesimi di Q' (7.° Intr.), tali siano per esempio le x''', x^{iv}, x'. Eseguendo in Q''' la permutazione semplice di genere 1.° fra queste x''', x^{iv}, x', dovrà Q''' per la ipotesi, e pel (5.° Intr.) non cambiar di valore; dunque per la identicità supposta dei risultati Q$'$, Q$'''$ non dovendo il cambiamento istesso fra le x''', x^{iv}, x' produrre mutazione di valore neppure in Q$'$; ne viene che Q$'$ sarà una funzione, la quale conserverà il proprio valore sotto due permutazioni semplici di 1.° genere entrambe fra tre delle prime quattro radici x', x'', x''' x^{iv}, la prima nel nostro esempio fra le x', x'', x^{iv}, e la seconda fra le x', x''', x^{iv}; ma se questo succede, i dodici valori della Q corrispondenti ad y' sono tutti uguali fra loro (n.° 5). Dunque in questo caso la funzione Q non avrà corrispondentemente ad y' che un solo valore.

2.° Sia la Q$'$ tale, che non si cambi sotto una delle permutazioni semplici di 2.° genere fra tutte le x', x'', x''', x^{v}, e sia per esempio Q$' = \mathrm{F}\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{iv})\,(x^{v}) = \mathrm{F}\,(x^{iv})\,(x''')\,(x'')\,(x')\,(x^{v})$. O si vuole che questa Q$'$ conservi inoltre il proprio valore per un' altra permutazione semplice essa pure di genere 2.° fra le stesse x', x'', x''', x^{iv}, oppure semplice di genere 1.° fra tre delle radici medesime, o nò; se nò, in allora è chiaro che i dodici risultati della Q corrispondenti ad y' non ponno uguagliarsi fra loro tutt' al più che a due a due, e però che tra essi i differenti fra loro non saranno in numero minore di 6.

3.° Conservi la Q$'$ il suo valore per due permutazioni fra le x', x'', x''', x^{iv} la prima semplice di 2.° genere fra tutte e quattro, e semplice la seconda di genere 1.° fra tre qualisivogliono di tali radici. Per quest' ultima permutazione il caso presente si ridurrà al (prec. 1.°), e però la Q$'$ non avrà dipendente da y', che un valor solo.

4.° Finalmente non si cambi la Q$'$ di valore sotto due permutazioni semplici entrambe di 2.° genere fra le solite x', x'', x''', x^{iv}. In questa ipotesi dovrà essa Q$'$ conservarsi la medesima sotto tutte e tre le permutazioni semplici di genere 2.°, che far si ponno tra le accennate quattro radici (n.° 3) e però avremo Q$' = \mathrm{F}(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{iv})\,(x^{v}) = \mathrm{F}\,(x'')\,(x')\,(x^{iv})\,(x''')\,(x^{v}) = \mathrm{F}\,(x''')\,(x^{iv})\,(x')\,(x'')\,(x^{v}) = \mathrm{F}\,(x^{iv})\,(x''')\,(x'')\,(x')\,(x^{v})$. Ora tra i risultati Q$'$, Q$''$, ec., Q^{v}

Q^{v} quello prendiamo, che contiene in fine la x''' (7.° Intr.), e tale sia per esempio Q^{v}; dovrà questo $Q^{\prime v}$ conservare il proprio valore per tutte le permutazioni semplici di 2.° genere fra le x', x'', $x^{\prime v}$, x^{v} (5.° Intr.), e quindi per la permutazione simultanea di x' in x', e di $x^{\prime v}$ in x^{v}; ma Q' è identico con Q^{v}: dunque per la stessa permutazione di x', in x'', e di $x^{\prime v}$ in x^{v} dovendo mantenere il proprio valore anche Q', ci verrà $Q' = F(x')(x')(x'')(x^{v})(x^{\prime v})$; ma Q' è ancora $= F(x'')(x')(x^{\prime v})(x''')(x^{v})$. Dunque risultando $F(x'')(x)(x''')(x^{v})(x^{\prime\prime v}) = F(x'')(x')(x^{v})(x'')(x^{v})$, la Q sarà una funzione la quale conserva il valor proprio sotto una permutazione semplice di 1.° genere fra le radici degli ultimi tre luoghi. Tra i risultati Q', Q'', ec. Q^{v} prendasi ora uno di quelli, che negli ultimi tre luoghi non contengono la x^{v} (7.° Intr.): dovendo esso pure mantenere il proprio valore per questa ultima permutazione, lo manterrà per una permutazione semplice di 1.° genere fra tre delle x', x'', x''', $x^{\prime v}$; ma permutando nella guisa medesima tali tre radici in Q', anche Q' per la sua identicità col risultato ora indicato deve conservarsi lo stesso. Dunque venendo Q' ad esser tale quale è stato supposto nel (prec. 1.°), ne segue, che ancora in questo caso corrispondentemente ad y' la funzione Q non avrà che un solo valore.

I considerati finora tutti comprendono evidentemente i casi possibili di uguaglianza, o disuguaglianza tra i valori della Q dipendenti da y'. Dunque ec.

41. Pertanto cercando dalla y' il valore della Q, se essa Q à corrispondentemente un numero di valori > 1, dovremo necessariamente cadere in un' Equazione di 12.°, oppur di 6.° grado, che supporrò essere la $Q^{6i} + \text{ec.} = 0$, in cui $i = 1$, oppure $= 2$. Questa Equazione poi non è capace di ricevere giusta il (n.° 25.) nè l' una, nè l' altra delle forme (V), (VI); come può facilmente vedersi per rapporto alla prima (V) con lo stesso raziocinio del (n.° 28)

e per rapporto alla seconda (VI), col supporre la Q^{6i} + ec. = o ridotta alla $(Q + a')^{6i} + b' = o$ col fare $Q + a' = R$, e con l'eseguire sulla $R^{6i} + b' = o$ dei discorsi perfettamente simili a quelli de' (n.° 22, 21).

42. Venendo presentemente alla determinazione della M dipendentemente da y' (n.° 39); pei (numeri 19, 24, 39, 40, 41) saremo, in ciò fare, condotti ad un' Equazione M^{6i} + ec. = o, da cui non possiamo ottenere immediatamente alcun valore della M (n.° 25). Dunque per avere un simil valore, converrà procurar di ridurre questa M^{6i} + ec. = o ad altra Equazione di soluzione cognita, e dalle cui radici sappiamo ricavare il valor delle sue.

43. Sia N^{q} + ec. = o questa nuova Equazione, e sia $N = \varphi' (x') (x'') (x''') (x^{iv}) (x^{v})$. I suoi coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti della M^{6i} + ec. = o, poichè la N^{q} + ec. = o non è di questa, che una trasformata (2.° Intr.): ma i coefficienti della M^{6i} + ec. = o sono funzioni razionali della y' (10.° Intr.). Dunque saranno funzioni razionali della stessa y' ancora i coefficienti della N^{q} + ec. = o, e quindi da questa y' dipenderanno le sue radici N', N'', ec. $N^{(q)}$, dipendendo dall' altra y'' le quantità $N^{(q+1)}$, $N^{(q+2)}$, ec., $N^{(2q)}$ radici di un' altra Equazione simile alla supposta.

O vogliamo che la N cambi valore, qualunque permutazione semplice di 1.° genere si faccia fra tutte le x', x'', ec., x^{v}, o si vuole che rimanga la medesima sotto una di esse.

1.° Abbia luogo il secondo di questi casi. In tale ipotesi i valori della N corrispondenti ad y' dipenderanno pei (n.ⁱ 40, 41) da un' Equazione $N + b' = o$, oppure da un' altra N^{6i} + ec. = o non suscettibile giusta il (n.° 25) di alcuna delle forme (V), (VI); ma se la N dipende dalla $N + b' = o$, allora la difficoltà medesima che incontrata abbiamo, nel voler determinare la M dalla y', s' incontra nel volerne la determinazione da $N = - b'$; e se la N dipende dalla $N^{6i} +$ ec. $= o$, allora la stessa difficoltà che incontravasi a determinare dalla y' la M, s' incontra a determinarne la N. Dunque in questo caso sarà inutile pel nostro intento la ricerca di una nuova Equazione $N^q +$ ec. $= o$.

2.° Mutisi la N di valore sotto tutte le indicate permutazioni. In questa supposizione, come nel (n.° 32) vedremo che l' esponente della $N^q +$ ec. $= o$ sarà uguale o multiplo di 5. Ciò essendo, suppongo $q = 5h$, e poichè col raziocinio del (n.° 28) si trova che la $N^{5b} +$ ec. $= o$ non può avere giusta il (n.° 25) la forma (V), o vuolsi che essa abbia l' altra $(N + a)^{5b} + T = o$, oppure la terza $N^{5b} + aN^{5b-1} + bN^{5b-2} +$ ec. $= o$. Nel primo di questi casi fatto $(N + a)^b = Y$, e ottenuta la $Y^5 - T = o$, per la determinazione del coefficiente T, e quindi per quella della quantità Y, e della N, come si vede dai (n.^{i} 38, e seguenti), cadremo nella stessa difficoltà, che abbiamo incontrata nel volere determinare il coefficiente M della $Z^5 - M = o$. Che se l' Equazione in N è della forma $N^{5b} + aN^{5b-1} + bN^{5b-2} +$ ec. $= o$, non potremo avere alcun valore della N, che riducendo tale Equazione ad altra di soluzione cognita, le cui radici ci possano servire alla determinazione di un simil valore (n.° 29).

44. Sia $P^r +$ ec. $= o$ questa nuova trasformata. Ciò stesso, che abbiamo detto della $N^q +$ ec. $= o$ (n.° 43), applicandosi egualmente alla $P^r +$ ec. $= o$, ne viene che il suo grado, e però r dovrà essere $= 1$ oppure $= 6i$, oppure $= 5f$, essendo f un numero intero, e positivo. Ora se $r = 1$, la P avendo allora un sol valore P' corrisponden-

te ad y'; la stessa difficoltà, che ci si oppone nel cercare i valori della N dipendentemente dalla y', ci si opporrà egualmente nel cercarli dalla P'; ma essi dalla y' non si possono tosto ottenere, perche le radici della $N^{5b} + aN^{5b-1} + bN^{5b-2}$ + ec. $= o$ dipendendo tutte egualmente dalla y', da essa y' non ci possono venire somministrate, che tutte insieme raccolte in questa Equazione, la quale priva pel (2.° n.° prec.) di ambedue le forme (V), (VI) non si può sciogliere immediatamente. Dunque neppure dalla P' potranno tosto ottenersi gli indicati valori della N.

Vogliasi $r = 6i$, ovvero $= 5f$. In questi due casi, come si è veduto non potersi tosto determinare alcun valore della N dipendentemente da y', mentre nella N^q + ec. $= o$ abbiasi $q = 6i$, oppure $= 5h$ (n.i 41, 43 pres.), così egualmente si trova non potersi dalla stessa y' ricavare tostamente alcun valore della P.

Che se si voglia questa P^r + ec. $= o$ riducibile ad altra Equazione; applicandosi su quest' altra il raziocinio medesimo, e replicandosi questo sempre successivamente; ne segue che per iscuoprire il valore della M coefficiente della $Z^5 - M = o$ (n.° 38.) in conseguenza della y', la determinazione delle quantità N, P, ec. è inutile, oppure impossibile.

45. Veggiamo se l' Equazione M^{6i} + ec. $= o$ oppure l' altra N^q + ec. $= o$, o la terza P^r + ec. $= o$, ec. sia riducibile ad altra, che abbia per incognita la stessa M, od N, o P, ec., e che dotata di una delle forme (V), (VI), oppure di un grado < 5 ci possa pei (n.i 25, 29) somministrare con la sua soluzione il valore dell' incognita corrispondente. Sia $N^t + cN^{t-1}$ + ec. $= o$ questa Equazione, a cui supporremo ridursi la N^q + ec. $= o$; i suoi coefficienti ec. dipendendo dalla y', come ne dipendono le quantità M, N, P, ec., saran tali che su di loro avran luogo i discorsi medesimi de' (numeri precedenti) e però dicendosi

dei coefficienti e, ec. ciò stesso che abbiam detto della precedente quantità P, ne segue che o sarà impossibile la loro determinazione; o se è possibile, siccome nell' unico caso, che abbiano per cadauno un sol valore corrispondente ad y'; allora dovendo essere tutti questi coefficienti e, ec. tante funzioni razionali della y', con un raziocinio simile a quello del (n.° 28.) troveremo essere impossibile l' esistenza della $N^{t} + eN^{t-1} + \text{ec.} = o$, il cui primo membro non è in fine, che un fattore del primo membro della $N' + \text{ec.} = o$.

46. 1.° Supponghiamo nella (VIII) $p = 1$. I valori della nostra M corrispondenti ai dodici risultati della prima fila in (I) essendo in numero di $6i$ disuguali fra loro (n.° 42), ne viene, che mentre vorrò cercare dipendentemente dalla $y + P = o$ un qualche valore della M, col ripetere gli stessi discorsi dei (numeri 42, e seguenti) giungeremo alle medesime conseguenze de' (numeri 42, ec., 45).

2.° Abbiasi nella (VIII) $p > 5$ (n.° 36). Essa (VIII) pei (numeri 34, 22, 28) non può avere nè l' una, nè l' altra delle forme (V), (VI), nè può avere fattor razionale (n.° 28). Dunque, affinchè possa ottenersene la soluzione, converrà ridurla all' altra (IX), dalle cui radici si possano ricavare i valori della y. Ora in questa (IX) supposto pel (n.° 34) l' esponente q uguale, o summultiplo di $\frac{120}{5} = 24$, o si vuole esso < 6, ovvero > 5. Se sia $q < 6$, i valori della u tra lor differenti pei (n.^{i} 34, 14) non possono essere più di due, cioè dei due che corrispondono in (C) ai due risultati 1.°, e 2.°, e che diremo u', u''; ma se dal valore u' cerco i valori della y, dovendone dedurre i valori ad esso u' corrispondenti, trovasi quì pure siccome nei (n.^{i} 43, e seg.^{i}) che ànno luogo i medesimi discorsi, che abbiamo fatti, e le difficoltà medesime che abbiamo incontrate, mentre dalla y' radice della (XI), o della $y + P = o$

(n.° prec.) volevamo dedurre i valori della N. Dunque dovendo aver luogo ancora l' ultima conseguenza de' (n.ⁱ 44, 1.° 46), ne segue che la determinazione della y dalla u sarà impossibile, o non potrà servire per iscuoprire il valore di M nella $Z^5 - M = o$.

Che se si voglia nella (IX) $q > 5$; dicendosi su di essa ciò stesso, che abbiam detto presentemente su della (VIII), in cui $p > 5$, ne verremo alla medesima conclusione.

47. Dunque, per quanto si progredisca avanti la serie delle trasformate (VII), (VIII), (IX), ec. avendo sempre luogo le stesse conseguenze de' (n.ⁱ 44, 45, 46), concluderemo essere impossibile la determinazione algebraica del coefficiente M nella $Z^5 - M = o$, e però nella $(z + a)^5 - M = o$ (n.° 38).

48. Riflettendo presentemente a tutti gli altri casi, che ci siamo proposti nel (n.° 38), osservisi, che questi si sono tutti considerati sulla Equazione $N^7 +$ ec. $= o$ del (n.° 43), e che cangiata la N in z, l' esponente q in $5h$, tutti perfettamente i discorsi, che abbiam fatti sulla $N^7 +$ ec. $= o$, si fanno in egual maniera sulla $z^{5h} + gz^{5h-1} +$ ec. $= o$. Dunque venendone le conseguenze medesime, concluderemo, che qualunque supposizione si faccia non può aversi la determinazione della z dalla y nè mediatamente, nè immediatamente.

49. Un' Equazione generale di 5.° grado (D) è incapace di soluzione algebraica.

Pei (n.ⁱ 30, 31, 32) non possiamo ottenere il valore delle x', x'', ec., x^v radici della (D), se non determinando il valore di una loro funzione z radice della (X). Ora questa z non si può determinare pei (n.ⁱ 33, 34), che col mezzo di una quantità y' radice di una trasformata (XI), oppure $y + P = o$ (n.ⁱ 36, 45, 46), ed inoltre i valori di essa z dipendenti da y' non possono, che essere insieme collegati in Equazioni della forma $(z + a)^5 - M = o$, oppupure della $z^{5h} + gz^{5h-1} + \text{ec.} = 0$ (n.¹ 38, 48, 43). Dunque nel primo di questi casi essendo impossibile la determinazione del coefficiente M (n.° 47), e nel secondo impossibile la determinazione della z (n.° 48), ne viene che sarà ancora impossibile la determinazione delle x', x'', ec., x^{v}, e però ec.

PARTE SECONDA

Della Insolubilità delle Equazioni tutte algebraiche generali di grado superiore al 5.°

50. Sia la (F) un' Equazione algebraica generale, il cui esponente m sia > 5, e formata con le sue radici una funzione qualunque algebraica, e razionale

(G) $$f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})(x^{v\prime\prime})\ldots.(x^{(m)}),$$

che pongo $= Z$, si scrivano nell' annessa Tavola in (K) in due linee orizzontali tutti i risultati, che provengono successivamente dalla (G), e dall' altra funzione

(H) $$f(x'')(x')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})(x^{v\prime\prime})\ldots.(x^{(m)}),$$

col portare nell' ultimo luogo la radice esistente nel primo, e venendo così a formarsi in ciascuna riga un numero m di risultati (7.° Intr.), cadauno dei quali non è che un valore della Z, chiamiamo quei della prima riga corrispondentemente Z', Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, ec., $Z^{(m)}$, e quei della seconda $Z^{(m+1)}$, $Z^{(m+2)}$, $Z^{(m+3)}$, $Z^{(m+4)}$, ec. $Z^{(2m)}$.

51. Nella ipotesi di $Z' = Z''$, come nel (n.° 9) si ritrova, che risulta $Z' = Z'' = Z''' = Z^{v} = \text{ec.} = Z^{(m)}$, e però che per questa permutazione i valori della Z sono fra loro uguali ad m ad m (9.° Intr.). Nella ipotesi poi di m numero pari, e di $Z' = Z'''$, nella medesima guisa si ritrova dover essere $Z' = Z''' = Z^{v} = \text{ec.} = Z^{(m-1)}$, e $Z'' = Z^{\prime v}$

$= Z^{v\prime}$

$= Z^{vi} =$ ec. $= Z^{(m)}$, e però i valori della Z uguali tra loro ad $\frac{m}{2}$ ad $\frac{m}{2}$.

52. Se la funzione Z conserva il proprio valore per tante permutazioni semplici di 1.° genere fra tre radici, la prima delle quali riguardi le radici de' posti 1.°, 2.°, e 3.°, la seconda le radici de' luoghi 2.°, 3.°, 4.°, la terza le radici de' luoghi 3.°, 4.°, 5.°, e così di seguito fino al fine della funzione; io dico che in questa ipotesi dovrà essere $Z' = Z''$, mentre m sia numero dispari, e sarà $Z' = Z'''$, mentre m sia numero pari.

1.° Sia m numero dispari: per le successive ora supposte permutazioni delle radici a tre a tre, la x' nella Z' potrà passare successivamente prima dopo le due x'', x''', poi dopo le due x^{iv}, x^{v}, e così in progresso, conservandosi la x'' immediatamente innanzi alla x''', la x''' innanzi alla x^{iv}, ec., e i risultati

$$f(x'')(x''')(x')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)}),$$
$$f(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x')(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)}),$$

ec., che ne nascono saranno tutti uguali fra loro, ed $= Z$ (5.° Intr.). Dunque a cagione di m numero dispari, essendo di numero pari le radici x'', x''', x^{iv}, x^{v}, ec., $x^{(m)}$; il risultato Z'' altro non sarà, che l' ultimo di quelli, che abbiamo ora determinati, col far passare oltre per ogni due radici la x'. Dunque avremo $Z'' = Z'$.

2.° Sia m numero pari. Per le stesse supposte permutazioni possiamo in Z' far passare contemporaneamente le x', x'' nella rispettiva posizione in cui si trovano, al di là della x''', quindi al di là della x^{iv}, poscia al di là della x^{v}, e così di seguito e ne verranno i risultati

$$f(x'')(x')(x'')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)}),$$
$$f(x''')(x^{iv})(x')(x'')(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)}),$$

ec. tutti uguali fra loro, ed $= Z'$; ma l' ultimo di questi non è evidentemente che Z'''. Dunque sarà $Z''' = Z'$.

53. Ritenuta la supposizione del (n.° prec.), nel caso di m numero pari avremo il risultato $Z^{(m+1)} = Z''$.

Se m è numero pari, in $Z^{(m+1)}$ le radici x', x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, $x^{v\prime}$, $x^{v\prime\prime}$, ec. $x^{(m)}$ degli ultimi m — 1 luoghi saran di numero dispari, e però col modo accennato nel (1.° n.° prec.) potremo far giungere la x' all' ultimo luogo, e ci verrà per tal guisa il risultato

$$f\,(x'')\,(x''')\,(x^{\prime v})\,(x^{v})\,(x^{v\prime})\,(x^{v\prime\prime})\;.\;.\;.\;.\;.\;(x^{(m)})\,(x'),$$

il quale per l' ipotesi fatta sarà $= Z^{(m+1)}$, ma questo non è che il risultato Z''. Dunque sarà $Z^{(m+1)} = Z''$.

54. I valori della Z differenti fra loro se sono di un numero < 5; essa Z dovrà conservare il valor proprio sotto le permutazioni tutte, che abbiamo supposte nel (n.° 52.).

Consideriamo in primo luogo i 120 risultati che nascono dalla Z', effettuando in lei tutte le possibili permutazioni fra le cinque radici x', x'', x''', $x^{\prime v}$, x^{v}. Poichè questi non sono, che i corrispondenti a quelli della Tavola (C), come nei (n.^{i} 14, 10, 12, 9, 5) facilmente si trova, che tra essi i risultati di valor differente, non potendo per la ipotesi essere più di quattro, non potranno neppur essere più di due, e tali saranno i due Z', $Z^{(m+1)}$ corrispondenti in (C) ai due 1.°, 2.°. Dunque la funzione Z' manterrà il proprio valore per la permutazione semplice di 1.° genere fra le x', x'', x''', e per l' altra fra le x''', $x^{\prime v}$, x^{v}; se ciò non fosse, se per una di tali permutazioni la Z' si cambiasse, allora tra questi primi 120 i valori della Z tra loro diversi non sarebbero più due, ma tre contro del cit°. (n.° 14). Consideriamo in seguito i 120 risultati, che formansi per tutte le permutazioni fra le seconde cinque radici x'', x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, $x^{v\prime}$. Dovendo i valori della Z tra loro disuguali essere meno di cinque, applicato su questi altri 120 risultati il discorso medesimo, che ab-

abbiam fatto sopra i 120 primi nati dalle permutazioni fra le x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, troveremo in egual modo pel (n.° 14), che la Z' manterrà il proprio valore per la permutazione semplice di 1.° genere fra le x'', x''', x^{iv}, e per l'altra fra le x^{iv}, x^{v}, x^{vi}. Facendo in terzo luogo il discorso istesso sopra dei 120 risultati, che provengono dalle permutazioni tutte fra le x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, x^{vii}, se ne ricava la medesima conseguenza; dunque la Z' non cambierà di valore neppure per la permutazione semplice di 1.° genere fra le x''', x^{iv}, x^{v}, e fra le x^{v}, x^{vi}, x^{vii}. Lo stesso si prosegue sempre a dire successivamente fino alle ultime cinque radici $x^{(m-4)}$, $x^{(m-3)}$, $x^{(m-2)}$, $x^{(m-1)}$, $x^{(m)}$. Dunque nella fatta supposizione conservando la Z' il proprio valore per tante permutazioni semplici di 1.° genere, la prima tra le x', x'', x''', la seconda tra le x'', x''', x^{iv}, la terza tra le x''', x^{iv}, x^{v}, e così di seguito fino alla permutazione fra le $x^{(m-2)}$, $x^{(m-1)}$, $x^{(m)}$, e conservandolo dipendentemente dalla forma della funzione, perchè a cagione di essere l' Equazione (F) generale (n.° 50), prescindiamo da qualunque valore, o rapporto particolare fra le sue radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$; ne segue che uno qualunque dei risultati Z', Z'', Z''', ec., e però la Z in generale manterrà il proprio valore per le permutazioni supposte nel (n.° 52).

55. Nella supposizione che i valori della Z disuguali fra loro siano di un numero r, se questo r è < 5, non potrà essere > 2. (*)

1.° Co-

(*) Il presente Teorema è stato da me esposto per riguardo alle Equazioni di 5.° grado nel (n.° 276. Teor. delle Eq.), nel (n.° 283 Teor.) è stato enunciato relativamente alle Equazioni di grado 6.°, e nel (n.° 289) è stato per analogia supposto rapporto alle Equazioni di grado ulteriore. Confessar deggio però, che quantunque sia esatta la dimostrazione del (n.° 276.), tale non è quel-

1.° Cominciamo nella nostra Z a supporre $m = 6$. In questo caso affin di avere tutti i 1. 2. 3. 4. 5. 6 = 720 risul-

---

la del (n.° 285.); ed il primo a dimostrare con tutta esattezza un simil Teorema relativamente a tutte le Equazioni è stato Pietro Abbati nel (n.° 26) della Lettera precedente.

Siami quivi permesso di porre alcune addizioni, e correzioni da farsi in varii numeri della mia Teoria delle Equazioni.

Sul fine del (n.° 261) all'espressione *vedremo egualmente dover essere* $p = nghi$.. conviene aggiungere: „ mentre i numeri g, h, i ec. siano, presi a due a due, primi fra loro; che se due, o più fra questi, per esempio i due q, h ànno un divisore comune, se sia $g = rk$, $h = rl$, essendo r il loro massimo comun divisore, allora risulterà $p = nrkli$... In generale il numero p deve sempre avere il minimo valore multiplo di cadauno de' numeri a, b, c, ec. „

Il Teorema del (n.° 266) deve esprimersi, come segue. „ Chiamato q il numero totale delle radici, che impiegansi in una data permutazione formata di due sole componenti, per cui la y non cambia di valore, se questo q sia numero primo, la permutazione supposta non potrà essere solamente semplice del genere secondo. „ Quindi nella dimostrazione deve togliersi la porzione. *Nel modo istesso, se tre, quattro, ec. sono le permutazioni componenti, e se* b, c, d; b, c, d, e; *ec sono rispettivamente i numeri esprimenti le loro radici, troveremo dover essere* $p = bcd$, $p = bcde$, *ec.* Avvertasi però, che questo cangiamento nulla influisce nelle dimostrazioni, a cui serve in seguito l' accennato Teorema, come può ognuno facilmente vedere da se medesimo.

L' immortale Lagrange nel (n.° 6. Remarq. II. Addit. au Memoire sur la Résolut. des Equat. numeriq. Academie de Berl. pour l'an. 1768.) chiamate a, b, c, d, ec. le radici reali d'una Equazione qualunque, ed $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, ec. le immaginarie, quindi chiamato m il grado dell' Equazione proposta, $n = \frac{m(m-1)}{2}$ il grado della Equazione delle differenze, chiamato p il numero delle radici reali in quella, e $2q$ il numero delle immaginarie, cosicchè $m = p + 2q$, dice che in questa dovranno aversi $p\frac{(p-1)}{2}$ radici reali positisultati, che da essa provengono per tutte le permutazioni possibili fra le x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, è chiaro, che altro-

---

ve, q reali negative, e $2q(p+q-1)$ immaginarie. Esponendo queste osservazioni del celeberrimo Autore nella mia Teoria delle Equazioni, asserisco lo stesso io pure nel (n.° 191.); ma però conviene riflettere al caso considerato nelle stesse Addizioni (Remarq. IV.). Se in conseguenza di questo caso abbiasi per esempio la radice $a = \alpha$, oppure $\alpha = \gamma$ (n. 14, 15), allora il numero q delle radici reali negative nella Equazione delle differenze deve aumentarsi di 2 corrispondentemente alle radici $-\beta^2$, $-\gamma^2$, oppure di 4 corrispondentemente alle $-(\beta-\delta)^2$, $-(\beta-\delta)^2$, $-(\beta+\delta)^2$, $-(\beta+\delta)^2$. Che se si voglia $\beta = \delta$, allora resterà aumentato di 2 il numero $\frac{p(p-1)}{2}$ delle radici positive reali in corrispondenza dei risultati $(\alpha-\gamma)^2$, $(\alpha-\gamma)^2$. Ora, mentre accada simile accidente, è facile a vedersi, che nella Equazione delle differenze il numero di quelle radici immaginarie, le quali perciò divengono reali o positive, o negative, è sempre pari: dunque chiamato $2r$ il numero di queste radici divenute reali positive, 2ſ il numero delle diventate reali negative, affine di esporre la precedente proposizione con tutta la generalità, sembra doversi dire, che nella Equazione delle differenze il numero delle radici reali positive uguaglia $\frac{p(p-1)}{2} + 2r$; quello delle reali negative uguaglia $q +$ 2ſ, e quello delle immaginarie è $= 2q(p+q-1) - 2r -$ 2ſ, potendo questi numeri r, ſ uguagliare lo zero, ed esserne maggiori.

Supposta nel (n.° 137 Teor. delle Eq.i) l'Equazione $x + Bx^2 + Cx + D = 0$, e chiamata $y^5 + Qy^5 + Ry^4 + Sy^3 + Ty^2 + Vy + Z = 0$ la sua trasformata nelle differenze, espongo i valori de' coefficienti Q, R, ec. Z espressi per gli altri B, C, D: tali valori sono que' medesimi, che espone Lagrange nell' indicata Memoria (n.° 30 Remarq. III.), avuto riguardo alla differenza dei segni tra le Equazioni da me supposte, e le supposte dal Ch. Autore; ma questi non sono i giusti valori; essi vengono dall' immortale Lagrange corretti in parte nell' aureo Libro (De la Résolut. des tro non dobbiam fare, se non che scrivere nell' annessa Tavola in fine di tutti i risultati (C) la $x^{v'}$, e poscia su ciascuno di essi eseguire la permutazione indicata nella Tavola nella prima linea di (K). Ora volendosi r, ossia il numero dei valori diversi della $Z < 5$, gli accennati 120 risultati aventi la $x^{v'}$ in fine si riducono ai due soli 1.°, 2.° (n.° 14), ossia ai due Z', $Z^{(m+1)} = Z^{v'}$. Dunque in conseguenza del cit.° (n.° 14) i 720 valori della Z si riducono ai soli $2 . 6 = 12$ delle due file (K); ma essendo $r < 5$, pel (n.° prec.) la Z mantiene il proprio valore per le permutazioni supposte nel (n.° 52), e in conseguenza di ciò per lo stesso (n.° 52), e per essere $m = 6$ numero pari, abbiamo $Z' = Z'''$, e pel (n.° 53) $Z^{v''} = Z''$. Dunque pel (n.° 51) la $Z' = Z'''$ dandoci $Z' = Z''' = Z^{v}$, $Z'' = Z^{\prime v} = Z^{v'}$, $Z^{v''} = Z^{\prime x} = Z^{x'}$, $Z^{v'''} = Z^{x} = Z^{x''}$, per l' altra Equazione $Z^{v''} = Z''$ otterremo $Z'' = Z^{\prime v} = Z^{v'} = Z^{v''} = Z^{\prime x} = Z^{x'}$, e così $Z' = Z''' = Z^{v} = Z^{v'''} = Z^{x} = Z^{x''}$. Dunque i valori della Z fra lor differenti saranno in fine due soli, cioè i due Z', $Z'' = Z^{v''}$, ossia in (K) 1.°, 2.°.

2.° Sia $m = 7$. Per ottenere tutti gli $1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 = 5040$ risultati, che nascono dalla Z per le permutazioni fra le x', x'', ec., $x^{v''}$, non devesi che aggiungere la $x^{v''}$ sul fine di tutti i 720 risultati, che son provenuti da tutte le permutazioni fra le x', x'', ec., $x^{v'}$, e poscia su ciascheduno di questi eseguire le permutazioni della prima linea in (K).

Equat. numeriq. pag. 50 n.° 39 Remarq. III.): i valori veri però, se non m' inganno, sono i seguenti.

$Q = 8B$

$R = 22B^2 + 8D.$

$S = 28B^3 + 16BD + 26C^2$

$T = 17B^4 + 24B^2D + 48BC^2 - 112D^2$

$V = 4B^5 + 32B^3D + 18B^2C^2 - 192BD^2 + 216C^2D$

$Z = 16B^4D - 4B^3C^2 - 128B^2D^2 + 144BC^2D - 27C^4 + 256D^3$

(K). Ora per la ipotesi di $r < 5$, i 720 risultati che ànno la $x^{v''}$ in fine, si riducono pel (prec. 1.°) ai due soli 1.°, e 2.°, ossia Z', $Z^{(m+1)} = Z^{v'''}$. Dunque per questo (prec. 1.°) i 5040 valori della Z vengono ridotti ai $2 . 7 = 14$ accennati in (K). Ma a cagione di $r < 5$, e di $m = 7$ numero dispari pei tre (n.^{i} 54, 1.° 52, 51) ci risulta $Z' = Z'' = Z''' = Z^{'v} = Z^{v} = Z^{v'} = Z^{v''}$, $Z^{v'''} = Z^{'x} = Z^{x} = Z^{x'} = Z^{x''} = Z^{x'''} = Z^{x'v}$. Dunque ancora in questo caso i valori disuguali della Z saran due, cioè i due Z', $Z^{v'''}$, ossia in (K) 1.°, e 2.°

3°. Facciasi $m = 8$. Formati tutti gli $1 . 2 . \ldots\ldots . 8 = 40320$ risultati della Z nel modo istesso, che abbiamo indicato nei (prec.^{i} 1.°, 2.°), osservo che essendo $r < 5$, i 5040 risultati aventi la $x^{v'''}$ in fine riduconsi ai due soli 1.°, e 2.°, ossia Z', $Z^{(m+1)} = Z^{'x}$ (prec. 2.°), e quindi tutti i 40320 ai $2 . 8 = 16$ esposti in (K). Ora per la ipotesi di $r < 5$, di $m = 8$ numero pari, e quindi pei (n.^{i} 54, 2.° 52, 51, 53), abbiam $Z' = Z''' = Z^{v} = Z^{v''} = Z^{x} = Z^{x''} = Z^{x'v} = Z^{xv'}$, $Z'' = Z^{'v} = Z^{v'} = Z^{v'''} = Z^{'x} = Z^{x'} = Z^{x'''} = Z^{xv}$. Dunque ancor quivi due soli saranno i valori diversi cioè in (K) i due 1.°, 2.°.

4.° Se vogliasi $m = 9, 11, 13$, ec., col raziocinio del (prec. 2.°), e se vogliasi $m = 10, 12, 14$, ec., col raziocinio de' (prec. 1.°, 3.°), sempre troveremo, che nella supposizione di $r < 5$ i valori della Z fra loro disuguali si ridurranno ai due soli 1.°, e 2.°, ossia (G), (H). Dunque ec.

56. Dunque rappresentandosi con la (E) del (n.° 13) una trasformata qualunque della (F); pel (n.° prec.) concluderemo quì pure, siccome nel (n.° 14), che, se si vuole l' esponente della (E) cioè $n < 5$, non potrà essere $n > 2$.

57. Eseguita fu la funzione (G) una permutazione qualun-

dunque, e ripetuta questa quanto si può, se quindi nascono cinque risultati nè più, nè meno, tale permutazione non può essere che o semplice di 1.° genere fra cinque delle x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$, o semplice di genere 2.° fra dieci, oppur quindici, oppur venti ec. delle stesse radici, sotto cui muovansi esse radici simultaneamente, e in corrispondenza a due a due, oppure a tre a tre, oppure a quattro a quattro, ec., e questo è facile a dedursi dalla natura delle permutazioni, e dall'essere il 5 un numero primo (6.°, 7.° Intr.).

58. Volendosi la soluzione della (F), sia $z = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii}) \ldots (x^{(m)})$ la funzione algebraica commensurabile (3.° Intr.), dipendentemente dalla quale si cerchi la determinazione immediata delle x', x'', x''', ec., $x^{(m)}$ (n.i 29. 30). Questa z dovrà essere una funzione, la quale cambi di valore ad una qualunque delle permutazioni considerate nel (n.° prec.): se ciò non fosse, se la z conservasse il suo valore sotto per esempio la permutazione, onde in (C) dal 1.° producesi il ris.° 25.°, allora per quanto si è detto nel (n.° 31), cercando da z' il valore x', caderemmo necessariamente in un' Equazione, di cui essendo radici tutte le x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}, non possiamo avere la soluzione (n.° 49).

Dunque l'Equazione in z dovrà essere di grado maggiore del quarto, e tale supporremo essere la (VII).

59. Nella (VII) l' esponente n deve essere multiplo di 5.

Il numero totale dei risultati uguali, o disuguali fra loro, che nascono dalla z per tutte le possibili permutazioni fra le x', x'', x''', ec., $x^{(n)}$ è $= 1.\ 2.\ 3.\ldots m$ (2.° Intr.), ed n uguaglia un tal numero diviso per un altro d, indicandosi con questo a quanti a quanti sono fra loro uguali gli esposti 1. 2. 3. . . . . m risultati della z. Ora se n non si vuole multiplo di 5, questo 5 dovrà essere un fattore del numero d; dunque fra tutte le permutazioni, le quali rendono i risultati di z tra loro uguali, una per lo meno ve ne sarà, che li rende fra loro uguali a 5 a 5; ma ciò pei (n.^{i} 57, 58) non può essere. Dunque non potrà neppur essere che il 5 non divida esattamente il numero n, e però ec.

Dunque supporremo $n = 5$ K, in cui K sia numero intero, e positivo, e supporremo che l' Equazione in z divenga la (X) (n.° 32.).

60. Supposta un' Equazione $Z^5 - M = 0$, di cui $Z' =$ ris.° 1.° (n.° 50) sia radice, un' altra qualunque delle sue radici, che chiamerò $Z^{(a)}$, non potrà provenire dalla Z', che per una delle permutazioni esposte nel (n.° 57.).

Poichè non vi sono che le indicate permutazioni del (n.° 57), le quali possono produrre nella Z cinque risultati di forma diversa nè più, nè meno; quivi avrà luogo la dimostrazione istessa del (n.° 23), e però ec.

61. Effettuando con le prime radici x', x'', x''', $x^{\prime v}$, x^v della Z' tutte le 120 permutazioni, e con i risultati che ne vengono, formata una tavola simile alla (C), suppongasi che la $Z^{(a)}$ del (n.°prec.) nasca da Z' per una permutazione semplice di 1.° genere fra queste prime cinque radici. In tale ipotesi si applicheranno quì pure i Teoremi, e le dimostrazioni dei (n.^{i} 15, 16, 17, 18), e pero verificandosi ancora quivi il Teorema del (n.° 19), e la riflessione fatta sul fine del (n.° 24), ne segue che il coefficiente M della $Z^5 - M = 0$ supposta nel (n.° prec.) dovrà avere tra i suoi risultati corrispondenti ai contenuti nella Tavola (C) un numero di valori > 2, e questi esisteranno tra i 24 della prima colonna verticale.

Facendo in seguito su tali valori una riflessione pienamenmente simile a quella, che abbiamo fatta sul fine del (n.° 39), cangiati i valori y', y'' colà esposti nei due (G), (H) (n.i 50, 55), e proseguendo dei raziocinii uguali a quelli dei (n.i 40, 41), troveremo che fra gli accennati 24 valori della M i $6i$ (n.° 41), che giusta il (n.° 39) corrispondono al risultato (G), ossia nell' annessa Tavola al 1.° in (K), sono tutti fra loro disuguali.

62. Che se nella $Z^5 - M = 0$ la $Z^{(a)}$ proveniente dalla Z' per una permutazione semplice di 1.° genere fra tutte le x'', x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, oppure fra le x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, x^{vii}, oppure ec.: formata anche allora una Tavola simile alla (C) con i 120 risultati, che provengono dalle permutazioni tutte fra le radici corrispondenti x'', x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, ovvero x''', x^{iv}, x^{v}, x^{vi}, x^{vii}, ovvero ec., troveremo riguardo alla M sempre verificarsi quanto abbiamo poc' anzi asserito.

Nasca finalmente la $Z^{(a)}$ dalla Z' per una permutazione semplice di 2.° genere a norma del (n.° 57), e succeda ciò cambiandosi contemporaneamente le x', x'', ec., $x^{(b)}$ nelle $x^{(b+1)}$, $x^{(b+2)}$, ec., $x^{(2b)}$, le $x^{(b+1)}$, $x^{(b+2)}$, ec.. $x^{(2b)}$ nelle $x^{(2b+1)}$, $x^{(2b+2)}$, ec., $x^{(3b)}$, le $x^{(2b+1)}$, $x^{(2b+2)}$, ec. $x^{(3b)}$ nelle $x^{(3b+1)}$, $x^{(3b+2)}$, ec., $x^{(4b)}$, queste nelle $x^{(4b+1)}$, $x^{(4b+2)}$, ec., $x^{(5b)}$, e queste ultime nelle x', x'', ec., $x^{(b)}$. Chiamo u' il complesso delle prime radici x', x'', ec., $x^{(b)}$, u'' il complesso delle seconde $x^{(b+1)}$, $x^{(b+2)}$, ec., $x^{(2b)}$, e così di seguito: formata la funzione

$f\,(u')\,(u'')\,(u''')\,(u^{iv})\,(u^{v})\,(x^{(5b+1)})\,(x^{5b+2)})\ldots\,,$ con i 120 risultati, che nascono dal permutare in essa fra loro soltanto le u', u'', u''', u^{iv}, u^{v}, faccio la solita Tavola corrispondente alla (C); e in conseguenza di questa vedrassi, che anche in questo caso ànno luogo rapporto alla M le proprietà esposte nel (n.° 61).

63. Dunque tra i precedenti valori della M (n.^{i} 61, 62) i disuguali fra loro e corrispondenti giusta il (n.° 39) al primo dei ris.^{i} (G), (H) non ponno mai essere di numero $< 6i$ in cui $i = 1$, oppure $= 2$ (n.° 41), e questi $6i$ valori vengono compresi tra i seguenti

(XIII) 1.°, 3.°, 4.°, 8.°, 12.°, 11.°, 13.°, 15.°, 16.°, 23.°. 20.°, 24.°,

così indicandosi nella nostra Tavola (n.^{i} 61, 62) quei risultati della Tavola (C), i quali in (I) vengono indicati con gli stessi numeri. In egual modo vedremo non poter essere meno di $6i$ i valori diversi di una funzione qualunque $Q = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m)})$ corrispondenti come di sopra a (G), mentre conservi essa il proprio valore sotto una delle permutazioni semplici di 1.° genere tra tutte le cinque x', x'', ec., x^{v}, e mentre abbia corrispondentemente a (G) un numero di valori > 1. Tali $6i$ valori della Q vengono poi essi pure compresi tra i precedenti (XIII), e deggiono non conservarsi gli stessi, mentre fra tre delle x', x'', x''' x^{iv} facciasi una qualunque permutazione semplice di 1.° genere (n.° 40).

64. Quella Equazione, che contiene tutti i valori della Q (n.° prec.) corrispondenti a (G) non può essere della forma $(Q + a')^{p} + b' = 0$.

Supposto $(Q + a') = R = \varphi(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(m)})$, la $(Q + a')^{p} + b' = 0$ diverrà con la sostituzione $R^{p} + b' = 0$, e questa Equazione a cagione della sua forma avrà tutte le radici fra lor disuguali: siano sue radici i due valori R', $R^{(a)}$; osservato qual sia la permutazione, onde $R^{(a)}$ nasce da R', si effettui essa di nuovo sulla $R^{(a)}$, si replichi, quanto si può, fino a riprodurre la R': chiaminsi

(XIV) R', $R^{(a)}$, $R^{(b)}$, $R^{(c)}$, ec. $R^{(u)}$

i risultati tutti, che quindi si formano, e sia h il loro numero. Poichè l' Equazione $(Q + a')^{p} + b' = 0$ contiene per la ipotesi tutti i valori della Q, e però la $R^p + b' = 0$ tutti i valori della R corrispondenti a (G) (n.° prec.), è facile a vedersi, che, poste le R', $R^{(a)}$ radici della $R^p + b' = 0$, tali saranno ancora tutte le (XIV).

Ora io dico, che il loro numero h deve essere $< p$. Chiamati difatti R''', R^{v} i due risultati

3.° $\varphi' \, (x'') \, (x''') \, (x') \, (x^{\prime v}) \, (x^{v}) \, (x^{v\prime}) \, \ldots\ldots \, (x^{(m)})$,

4.° $\varphi' \, (x''') \, (x') \, (x'') \, (x^{\prime v}) \, (x^{v}) \, (x^{v\prime}) \, \ldots\ldots \, (x^{(m)})$

(n.° prec.): o questi voglionsi due termini della serie (XIV), o nò; se nè, essendo pel (n.° prec.) radici essi pure della $R^p + b' = 0$, ne viene che dalle (XIV) tutte non si comprendono le radici della $R^p + b' = 0$, e però che avremo $h < p$. Che se si vuole essere R''' uno dei termini (XIV), se si vuole per esempio lo stesso che $R^{(b)}$, allora dovendo nella permutazione, per cui si forma la serie (XIV), entrare le x', x'', x''', osservo se, mentre muovonsi queste, restano ferme tutte le altre $x^{\prime v}$, x^{v}, $x^{v\prime}$, ec., $x^{(m)}$, oppure se si muovono in tutto, o in parte esse pure. Nel primo di questi casi i risultati (XIV) non saranno, che i tre R', R''', $R^{\prime v}$, e però avendosi $h = 3$ sarà $h < p$ (n.° prec.). Nel caso secondo poi, mentre si passa da R' ad R''' ossia ad $R^{(b)}$, cambiandosi le x', x'', x''' fra loro, e ferme restando le $x^{\prime v}$, x^{v}, $x^{v\prime}$, ec., $x^{(m)}$, e nel passare da R' ad $R^{(a)}$ dovendosi muovere non solo le x', x'', x''', ma ancora alcune o tutte le $x^{\prime v}$, x^{v}, $x^{v\prime}$, ec., $x^{(m)}$, ne segue che la permutazione, onde $R^{(a)}$ nasce da R' non potrà già essere semplice di 1.° genere, ma dovrà essere semplice di genere 2.° (6.°, 8.° Intr.), di cui la permutazione fra le x', x'', x''' sarà una delle componenti: quindi in tutti i termini (XIV) le radici x', x'', x'' non potranno occupare, che i posti primo, se-

secondo, e terzo della funzione (6.° Intr.) come di fatti si vede succedere, ponendo ad esempio

$R^{(a)} = \varphi' (x''') (x') (x'') (x^{v}) (x'^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots x^{(m)}$, e però

$R' = \varphi' (x') (x'') (x''') (x'^{v}) (x^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

$R^{(a)} = \varphi' (x''') (x') (x'') (x^{v}) (x'^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

$R^{(b)} = \varphi' (x'') (x''') (x') (x'^{v}) (x^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

$R^{(c)} = \varphi' (x') (x'') (x''') (x^{v}) (x'^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

$R^{(d)} = \varphi' (x''') (x') (x'') (x'^{v}) (x^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

. . . . ec.

$R^{(u)} = \varphi' (x'') (x''') (x') (x^{v}) (x'^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)})$,

Ora sono radici della $R^{p} + b' = 0$ ancora i risultati

$R^{xv'} = 16.^{\circ}\ \varphi' (x'') (x'^{v}) (x''') (x') (x^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots (x^{(m)}$,

$R^{xx'''} = 23.^{\circ}\ \varphi' (x'^{v}) (x') (x''') (x'') (x^{v}) (x^{v'}) \ldots\ldots, (x^{(m)})$

(n.° prec.), perchè nati dalla R' per la permutazione semplice di 1.° genere fra le tre x', x'', x'^{v}; ma in $R^{xv'}$ la x', in $R^{xx'''}$ la x'' occupano il luogo quarto. Dunque in niuno dei risultati (XIV) potendo nella nostra ipotesi le x', x'', occupare il luogo quarto, ne viene che i risultati $R^{xv'}$ $R^{xx'''}$ dovranno essere diversi da' tutti gli indicati (XIV), e però nella loro serie non comprendendosi neppure in quest' ultimo caso tutte le radici della $R^{p} + b' = 0$, ne segue che avremo sempre $h < p$.

Ciò posto ritenghiamo per α il valore, che le abbiamo attribuito nel (n.° 21), e per la forma della $R^{p} + b' = 0$ facciamo $R^{(a)} = \alpha R'$; per le ragioni indicate nel cit.° (n.° 21, e n.° 18) dovrà essere $R^{(b)} = \alpha R^{(a)}$, $R^{(c)} = \alpha R^{(b)}$, ec. $R^{(u)} = \alpha R^{(t)}$, $R' = \alpha R^{(u)}$, e quindi con la sostituzione successiva risultandoci $R' = \alpha^{h} R'$, otterremo $1 = \alpha^{h}$; ma essendo $h < p$, l' Equazione $1 = \alpha^{h}$ è impossibile, ed essendo la serie (XIV) considerata in generale, succede sempre quest' assurdo, qualunque siasi la permutazione, onde $R^{(a)}$ producesi da R'. Dunque sarà ancora assurda l' Equazione $R^p + b' = 0$, e però l' altra $(Q + a')^p + b' = 0$.

Lo stesso si dimostra egualmente, se la Q conserva il proprio valore per una delle permutazioni considerate nel (n.° 62); come ognuno può facilmente vedere da se medesimo.

65. Dunque non potrà essere della forma $(M + a')^p + b' = 0$ neppure l' Equazione, che contiene tutti i valori della M corrispondenti come nel (n.° 63) al risultato (G); e nella maniera medesima si ritrova, che l' Equazione la quale contiene tutti insieme i valori diversi della M tanto i corrispondenti a (G), come i corrispondenti ad (H) non può neppur essa avere la solita forma (VI).

66. L' Equazione (X) non può acquistare giusta il (n.° 25) la forma $(z + a)^{5k} - M = 0$.

Se ciò fosse; supposto $(z + a)^k = Z$, ne verrebbe $Z^5 - M = 0$ in cui M avrebbe un valor solo (n.i 59, 32); ma ciò non può essere; perchè pel (n.° 63) in un' Equazione della forma $Z^5 - M = 0$ il coefficiente M deve avere un numero di valori tra loro diversi non $< 6i$. Dunque ec.

67. Nè l'Equazione in z, nè le altre in M (n.i 63, 65) possono avere alcun fattore, i coefficienti del quale siano funzioni razionali de' coefficienti proprii; quindi sono incapaci di ricevere secondo il (n.° 25) la forma (V); e tutto ciò si dimostra come nel (n.° 28).

68. Non potendo pei (n.i 66, 67, 25) ottenersi la soluzione immediata della (X), e pel (n.° 58) essendo questa necessaria per la determinazione delle x', x'', ec., $x^{(m)}$; bisognerà a norma del (n.°. 34) trasformare essa (X) in un' altra Equazione (VIII), dalla cui soluzione possansi poscia ricavare i valori delle z', z'', z''', ec. Ora o si vuole

l' esponente p della (VIII) uguale o multiplo di 5, oppure non si vuol tale; ma nel primo di questi casi à luogo la riflessione medesima, che abbiam fatta sul fine del cit.° (n.° 34); dunque potrem trascurarlo; e fermandoci all' altro caso, cominciarem dal supporre $p < 6$.

In tale supposizione pel (n.° 55) non potrà essere $p > 2$, e convertitasi quindi l' Equazione (VIII) nella (XI) (n.° 36), le sue radici y', y'' corrisponderanno alle due funzioni (G), (H), onde supporremo $y' = (G)$, $y'' = (H)$. Per la stessa ragione poi, che abbiamo indicata nel (n.° 37) dovendo i valori della z che dipendono da y' essere di un numero uguale, o multiplo di 5, supporremo che vengano essi tutti compresi nella Equazione (XII).

69. L' Equazione (XII) non è suscettibile secondo il (n.° 25) nè della forma (V), nè della (VI).

Rapporto alla (V) ciò si dimostra come nel (n.° 28), per riguardo poi alla (VI), non avendo cadauno dei coefficienti g, ec. della (XII) che due valori disuguali corrispondenti ai due y', y'', ciò si dimostra in maniera affatto simile a quella del (n.° 66).

Quindi per la determinazione della z dalla (XII) non potremo servirci che del 2.°, oppure del 3.° fra i mezzi indicati nel (n.° 38).

70. Supposto un fattore della (XII)

$$z^{l} + az^{l-1} + bz^{l-2} + cz^{l-3} + \text{ec.} = 0, \tag{XV}$$

in cui l sia un numero non divisibile esattamente per 5, cadauno dei coefficienti di questo per esempio il coefficiente a dovrà avere un numero di valori diversi uguale, o multiplo di 5.

Chiamati a', a'', ec. $a^{(f)}$ i diversi valori di a, che dipendono da y' (n.° 68), e b', b'', ec., $b^{(f)}$, c', c'', ec., $c^{(f)}$, ec. i valori corrispondenti degli altri coefficienti b, c, ec., pongansi essi successivamente nella (XV), si moltiplichino insieme i risultati $z^l + a'z^{l-1} + b'z^{l-2} + c'z^{l-3} + \text{ec.} = 0$, $z^l + a''z^{l-1} + b''z^{l-2} + c''z^{l-3} + \text{ec.} = 0$, ec. $z^l + a^{(f)} z^{l-1} + b^{(f)} z^{l-2} + c^{(f)} z^{l-3} + \text{ec.} = 0$, che ne vengono, e sia

$$z^{(fl)} + Gz^{fl-1} + \text{ec.} = 0 \tag{XVI}$$

il prodotto. I coefficienti G, ec. della (XVI) essendo funzioni commensurabili della y' (10.° Intr.), ne saranno determinabili razionalmente. Effettuata simile determinazione, io dico, che la (XVI) dovrà essere identica con la (XII); se ciò non fosse, poichè la (XII), e la (XVI) ànno delle radici comuni, tali essendo per lo meno le contenute nella (XV), col trovare il massimo comun divisore tra i loro primi membri, ne verrebbe una quantità $z^{l} + \text{ec.}$, i coefficienti della quale sarebbero funzioni razionali della y', e che dividerebbe esattamente il primo membro di amendue le (XII), (XV); ma ciò non può essere, come può facilmente vedersi con raziocinio simile a quello del (n.° 28); dunque essendo la (XVI) identica con la (XII), avremo $fl = 5h$; ora l per la ipotesi non è divisibile per 5; dunque dovendo esser tale il numero f, ne viene che ec.

71. Dunque per la determinazione della z sarà inutile il cercare un suo fattore (XV), in cui l sia non divisibile per 5. Imperciocchè affin di ottenerlo, dovendosi determinare il valore di ciascun coefficiente a, b, c, ec., dovremmo nella determinazione per esempio di a cadere in un' Equazione di grado f uguale, o multiplo di 5, la quale si dimostrerebbe, come nel (n.° 69), non essere suscettibile giusta il (n.° 25) nè dell' una nè dell' altra delle forme (V), (VI); e per conseguenza s' incontrerebbe nella soluzione di questa una difficoltà simile a quella, che s' incontra nella soluzione della (XII).

72. Vogliasi il valore della z col 2.° dei mezzi indicati nel (n.° 38).

Dovremo perciò determinare un fattore della (XII), il cui esponente sia uguale, o multiplo di 5 (n.° 71), e il quale per le ragioni esposte nei (n.^{i} 38, 25) deve avere una delle forme (V), (VI); ma con lo stesso discorso del (n.° 28) si trova, che un tal fattore non può avere la prima di queste forme; abbia dunque la seconda, e sia esso il seguente $(z + a')^{5l} - M = 0$; supposto $(z + a)^l = Z$, ci verrà $Z^5 - M = 0$. Ora corrispondentemente ad $y' =$ (C) il coefficiente M di questa Equazione à un numero di valori non $< 6i$ (n.° 63), e tali valori pe' (n.^{i} 25, 65, 67) non possono determinarsi dall' Equazione, che li contiene, nè immediatamente, nè col mezzo di un suo fattore supposto secondo il (n.° 67). Dunque dovremo ridurre come nei (n.^{i} 42, 43) questa Equazione in M ad un' altra, che supporrò essere la $N^q +$ ec.

73. Nascendo pel (n.° 60) i valori Z', Z'', ec., Z^r l' uno dall' altro per una delle permutazioni del (n.° 57), supponghiamo formata con le radici appartenenti a tale permutazione a norma dei (n.^{i} 61, 62) una tavola simile alla (C), e quindi i valori della N esistenti in questa, e corrispondenti ad y' siano gli indicati in (XIII) (n.° 63). Ora o si vuole, che la N conservi il proprio valore per una delle permutazioni semplici di 1.° genere fra tutte e cinque le quantità, che sonosi mosse nella formazione della supposta tavola; o si vuole, che cambi sotto una di simili permutazioni.

1.° Se la N mantiene il valor proprio per la permutazione indicata, allora i valori della N esistenti nella nostra Tavola essendosi ridotti a quelli della prima colonna verticale (n.^{i} 61, 62), tra questi i corrispondenti ai (XIII) pe' (n.^{i} 61, 41, 40) si riducono ad un solo, oppure a $6i$ (n.° 63) disuguali fra loro: nel secondo di questi casi l' Equazione in N cor-

N corrispondente ad y' risulterà di grado non $< 6i$, e come nei (n.i 28, 64) si dimostra non poter essa avere nè la forma (V), nè la (VI), nè alcun fattore i cui coefficienti siano funzioni commensurabili dei proprii; e nel primo tutti i valori della N sono fra loro uguali per lo meno a $6i$ a $6i$, onde cercando da uno di essi il valore della M, caderemo per essa M in un' Equazione di grado non $< 6i$, la quale come nei (n.i 64, 67) si trova non poter avere nè alcun fattore a norma del cit.° (n.° 67) nè secondo il (n.° 25) l' una, o l' altra delle forme (V), (VI). Dunque per la determinazione della M, o della N dipendentemente dalla y' verremo quì pure ad una conclusione simile a quella del (1.° n.° 43).

2.° Mutisi la N di valore sotto una delle permutazioni sovraccennate: in questa supposizione come nel (3.° n.° 43) riducendosi l' Equazione in N alla $(N + a)^{5l} - L = 0$, e quindi col supporre $(N + a)^{l} = Y$, alla $Y^{5} - L = 0$, oppure riducendosi alla $N^{5l} + aN^{5l-1} + bN^{5l-2} + \text{ec.} = 0$, e trovandosi come nel (n.° 28) non potere l' Equazione in N avere alcun fattore, i coefficienti del quale siano funzioni razionali de' suoi, verremo alle medesime conseguenze del cit.° (2.° n.° 43), e del (n.° 45).

Se vogliamo l' Equazione in N ridursi ad un' altra $P^{r} + \text{ec.} = 0$, e ad altre ulteriori, applicandosi quivi gli stessi discorsi dei (n.i 44, 45) ne seguirà la conclusione medesima, e però diremo che quì pure la determinazione delle N, P, ec. in conseguenza della y' è impossibile, oppure inutile allo scuoprimento della M nella $Z^{5} - M = 0$.

73. Il valore di questa M se si cerchi dipendentemente dalla y nella ipotesi del (1.°, e 2.° n.° 46); con discorsi affatto simili a quelli del cit.° (n.° 46), ne troveremo anche allora impossibile la determinazione, e però essendo sempre il coefficiente M della $Z^{5} - M = 0$, ossia della $(z + a')^{5l} - M = 0$ indeterminabile, concluderemo essere

re impossibile la soluzione del Problema propostoci nel (n.° 72).

Che se il valore della z nella (XII) vogliasi col 3.° dei metodi del (n.° 38); avendo luogo quì pure le riflessioni del (n.° 48), avrà luogo pur anche la conseguenza medesima.

74. Dunque essendo sempre indeterminabile algebraicamente il valore della z radice della (XII), dovrà essere impossibile la soluzione algebraica della (X) (n.° 68).

75. La soluzione generale delle Equazioni algebraiche di grado superiore al 4.° è sempre impossibile.

Rapporto alle Equazioni di 5.° grado ciò è stato dimostrato nel (n.° 49). Riguardo poi alle Equazioni di grado ulteriore la verità di questo Teorema deducesi dall' osservare semplicemente, che per la soluzione della (F) è necessario di determinare il valore della z radice della (X) (n.^{i} 58, 59, 68); ma tale determinazione è impossibile (n.° prec.). Dunque ec.

$x'')\ (x''')\ (x^{v})$,

$(x')\ (x''')\ (x^{v})$,

$(x''')\ (x')\ (x^{v})$,

$(x')\ (x'')\ (x^{v})$,

$(x''')\ (x'')\ (x^{v})$,

$(x'')\ (x')\ (x^{v})$.

$(x^{\prime v})\ (x^{v})\ (x^{v\prime})\ (x^{v\prime\prime}) \ldots\ldots (x^{(m)})\ (x''')\ (x^{\prime v})$,

$x^{\prime v})\ (x^{v})\ (x^{v\prime}) \ldots\ldots\ldots (x^{(m-1)})$,

$(x^{\prime v})\ (x^{v})\ (x^{v\prime})\ (x^{v\prime\prime}) \ldots\ldots (x^{(m)})\ (x'')\ (x')$,

$(x^{\prime v})\ (x^{v})\ (x^{v\prime}) \ldots\ldots\ldots (x^{(m-1)})$.

(B)

1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$, 7.° $f(x'')(x''')(x^{iv})(x')(x^{v})$, 13.° $f(x''')(x^{iv})(x')(x'')(x^{v})$, 19.° $f(x^{iv})(x')(x'')(x''')(x^{v})$,

2.° $f(x'')(x')(x''')(x^{iv})(x^{v})$, 8.° $f(x')(x''')(x^{iv})(x'')(x^{v})$, 14.° $f(x''')(x^{iv})(x'')(x')(x^{v})$, 20.° $f(x^{iv})(x'')(x')(x''')(x^{v})$,

3.° $f(x'')(x''')(x')(x^{iv})(x^{v})$, 9.° $f(x''')(x')(x^{iv})(x'')(x^{v})$, 15.° $f(x')(x^{iv})(x'')(x''')(x^{v})$, 21.° $f(x^{iv})(x'')(x''')(x')(x^{v})$,

4.° $f(x''')(x')(x'')(x^{iv})(x^{v})$, 10.° $f(x')(x'')(x^{iv})(x''')(x^{v})$, 16.° $f(x'')(x^{iv})(x''')(x')(x^{v})$, 22.° $f(x^{iv})(x''')(x')(x'')(x^{v})$,

5.° $f(x')(x''')(x'')(x^{iv})(x^{v})$, 11.° $f(x''')(x'')(x^{iv})(x')(x^{v})$, 17.° $f(x'')(x^{iv})(x')(x''')(x^{v})$, 23.° $f(x^{iv})(x')(x''')(x'')(x^{v})$,

6.° $f(x''')(x'')(x')(x^{iv})(x^{v})$, 12.° $f(x'')(x')(x^{iv})(x''')(x^{v})$, 18.° $f(x')(x^{iv})(x''')(x'')(x^{v})$, 24.° $f(x^{iv})(x''')(x'')(x')(x^{v})$.

(C)

1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$, 25.° $f(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x')$, 49.° $f(x''')(x^{iv})(x^{v})(x')(x'')$, 73.° $f(x^{iv})(x^{v})(x')(x'')(x''')$, 97.° $f(x^{v})(x')(x'')(x''')(x^{iv})$;

2.° $f(x'')(x')(x''')(x^{iv})(x^{v})$, 26.° $f(x')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x'')$, 50.° $f(x''')(x^{iv})(x^{v})(x'')(x')$, 74.° $f(x^{iv})(x^{v})(x'')(x')(x''')$, 98.° $f(x^{v})(x'')(x')(x''')(x^{iv})$,

3.° $f(x'')(x''')(x')(x^{iv})(x^{v})$, 27.° $f(x''')(x')(x^{iv})(x^{v})(x'')$, 51.° $f(x')(x^{iv})(x^{v})(x'')(x''')$, 75.° $f(x^{iv})(x^{v})(x'')(x''')(x')$, 99.° $f(x^{v})(x'')(x''')(x')(x^{iv})$,

4.° $f(x''')(x')(x'')(x^{iv})(x^{v})$, 28.° $f(x'')(x')(x^{iv})(x^{v})(x''')$, 52.° $f(x'')(x^{iv})(x^{v})(x''')(x')$, 76.° $f(x^{iv})(x^{v})(x''')(x')(x'')$, 100.° $f(x^{v})(x''')(x')(x'')(x^{iv})$,

ec., ec., ec., ec., ec.,

24.° $f(x^{iv})(x''')(x'')(x')(x^{v})$, 48.° $f(x''')(x'')(x')(x^{v})(x^{iv})$, 72.° $f(x'')(x')(x^{v})(x^{iv})(x''')$, 96.° $f(x')(x^{v})(x^{iv})(x''')(x'')$, 120.° $f(x^{v})(x^{iv})(x''')(x'')(x')$.

(K)

1.° $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})$, $f(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})(x')$, $f(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})(x')(x'')$,

$f(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})(x')(x'')(x''')$, ec., $f(x^{(m)})(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})\ldots\ldots(x^{(m-1)})$,

2.° $f(x'')(x')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})$, $f(x')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})(x'')$, $f(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})(x'')(x')$,

$f(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})(x^{vii})\ldots\ldots(x^{(m)})(x'')(x')(x''')$, ec., $f(x^{(m)})(x'')(x')(x''')(x^{iv})(x^{v})(x^{vi})\ldots\ldots(x^{(m-1)})$.

RICERCHE CHIMICO-ECONOMICHE INTORNO ALLA SETA

Di Giannantonio Giobert

Ricevute il dì 20 Dicembre 1802.

La seta presenta alla Chimica tre assai interessanti problemi.

Il primo consiste nella filatura della medesima.

Un altro nella maniera di operare la distruzione della materia colorante gialla che comunemente ne accompagna il glutine, o come si dice la vernice, conservando intatta e inalterata questa vernice medesima, cioè conservando alla seta la sua rigidezza, elasticità, e lucentezza naturale, o come volgarmente si dice la sua crudezza.

Un terzo finalmente consiste nella maniera di togliere alla seta e la vernice, e la materia colorante, ma a separarla con poco dispendio, e senza far uso del sapone, o delle sostanze alcaline, di cui è notissimo l'uso, e conservando alla seta tutte le proprietà che le Arti ricercano in essa.

A ciascuno in particolare di questi problemi hanno applicato molti Chimici, e le nostre cognizioni si sono per mezzo delle loro ricerche considerabilmente avanzate. Ma in generale il risultato di esse, poco, anzi pochissimo soccorso ha presentato alle arti. Per la qual cosa mi è sembrato, che ulteriori ricerche potendo vie meglio illustrare questi argomenti, egli era uno speciale dovere degli Italiani lo applicarvisi.

Molto imperfette sono ancora le esperienze che io ho intraprese intorno alla filatura della seta; ma quelle che si aggirano intorno all'arte di imbiancarla conservandone il crudo, e che riguardano lo scrudamento mi presentarono de' risulsultati che mi sembrano di qualche importanza; io li sottometto al giudizio di una delle più rinomate Accademie, e riputerò non avere intieramente perduto il tempo se esse potranno meritare l' approvazione de' miei colleghi.

Dello imbiancamento della Seta conservandone la naturale crudezza.

Questo problema intorno al quale fu eccitata l' attenzione de' Chimici con ricchi premj fu pienamente risolto dal celebre Baumé.

Il suo metodo che fu lungamente un segreto è ora noto a tutti. Esso consiste a immergere due volte la seta in un liquore composto di 48 parti di alcool, ed una di acido muriatico preparato in una maniera particolare, cioè con estreme precauzioni perchè si ottenga affatto libero dal minimo vestigio di acido nitrico.

La maniera di questo Chimico riesce a meraviglia; ma la operazione riesce assai dispendiosa. Essa riesce in oltre complicata e imbarazzante attese le grandi attenzioni nella preparazione dell' acido muriatico. E finalmente quando si versa il liquore accennato sopra la seta, esso veste prontamente un bel color verde, acquista una consistenza considerevole, una specie di gelatina si vede formarsi all' intorno di ciascun filamento. Le quali circostanze annunziano che l' azione del liquore in ben tutt' altro consiste, che in una semplice facoltà di mutarne il colore. La seta diminuisce considerabilmente di peso; conserva egli è vero gran parte delle proprietà, che la distinguono nello stato naturale, ma essa è lontana dal conservarle nel grado in cui la desiderano gli artisti per quelle manifatture a cui la destinano. La dissoluzione di una parte del glutine di essa, la quale forma la diminuzione del peso, rende il metodo più dispendioso di quello che a prima vista non sembri, perciocchè oltre alle spese necessarie alla operazione, questa diminuzione di peso è a calcolarsi, perchè si tratta di sostanza che sostiene sempre un alto valore. In questo metodo finalmente io ho sempre osservato che la seta si irrigidisce, si arriccia, e che è molto difficile di ottenerne l'imbiancamento uguale in tutte le parti.

Brugnatelli nel render conto ne' suoi giornali del metodo accennato del Chimico Parigino ha proposto di sostituire all'acido muriatico ordinario, che prescrive Baumé, l'acido muriatico ossigenato. Alcuni anni prima il medesimo Chimico avea proposto l' uso di quest' ultimo sotto forma di gaz, e puro; cioè senza l'associazione dell' Alcool.

Il celebre Crell aveva prima di lui proposto l' acido istesso in una delle varie annotazioni che fece alla memoria di Dolfusi sopra l' imbiancamento delle tele.

Ma egli è noto che l'acido muriatico ossigenato tinge in giallo in luogo di imbiancare le sostanze animali.

Quando io ho conservato la seta in una atmosfera di gaz acido muriatico ossigenato, la combustione della medesima ne fu il risultato costante.

Quando si immerge la seta nell' acido muriatico ossigenato liquido, l'intensità del color giallo nella seta si diminuisce, e pare che più si ravvicini al bianco. Ma quando si estrae, si lava, e si esamina, la seta si trova tinta di color giallo canarino; e questa nuova tinta di giallo è infinitamente più soda, più difficile a distruggersi, che quella che la accompagna naturalmente. Nella reazione dell' acido muriatico ossigenato sopra la seta pare adunque che per quest' acido si distrugga di fatti la materia colorante gialla, probabilmente di origine vegetale, che accompagna la seta nel suo stato naturale. Ma mentre l'acido muriatico ossigenato distrugge questa materia colorante, esso produce sopra la seta quella impressione che suole produrre sopra tutte le sostanze animali, vale a dire una tinta di color giallo. Ed è questa nuova tinta di color meno intenso ma più assai fisso che la seta conserva, e che successivamente in essa è più difficicile di fare scomparire, che non lo fosse di distruggere la più saturata, e più carica, che prima la accompagnava.

Io ho fatto digerire la seta nell'acido muriatico ossigenato liquido molto diluto, e nella proporzione di un' oncia di acido mediocremente forte con dodici di acqua. L'acido così reso debole non più alterava sensibilmente la seta, ma esso tinge ancora in giallo la seta bianca, che si immerge in esso. Io ho fatto uso per conseguenza di questo acido così dilungato.

Ho cominciato a bagnare la seta con acqua tepida, e ben la premeva successivamente per dividerne i filamenti. La immersi allora nell'acido muriatico ossigenato diluto. Nello spazio di alcuni minuti il colore giallo della seta si diminuiva. La macerazione si continuava per circa due ore. La seta estratta allora, e lavata conservava una tinta di giallo canarino vivace.

Si sa che il vapore dello zolfo, o l'acido solforoso distruggono la tinta gialla che vestono le sostanze animali ossigenandosi. In conseguenza la seta tinta in giallo dall' acido muriatico ossigenato io la immergeva in acido solforoso ugualmente dilungatissimo.

La tinta gialla della seta si faceva molto più chiara, e il colore della seta avvicinavasi al bianco.

Ho potuto allora comprendere, che ripetendo abbastanza le medesime operazioni, cioè una immersione alternativa della seta negli acidi muriatico ossigenato, e solforoso dilungatissimi e terminando col solforoso, si poteva ottenere un imbiancamento perfetto.

Nella seconda immersione della seta nell' acido muriatico ossigenato, la tinta gialla si faceva più intensa di quello che era attualmente, e così in tutte le successive immersioni. La qual circostanza prova evidentemente l' azione colorante dell' acido, o l' impressione di esso sopra la seta, e l' impossibilità di far reagire il medesimo sopra la materia co-

colorante naturale della seta, senza reagire sulla seta medesima.

Ad ogni modo per altro siccome la tinta gialla prodotta dall'acido muriatico ossigenato è in ogni caso distruggibile dal solforoso, ripetendo le immersioni si riesce facilmente col muriatico ossigenato a distruggere tutta la materia colorante naturale della seta, e siccome col solforoso si distrugge finalmente quell'altra risultante dall'impressione dell'acido muriatico ossigenato, così ho potuto in tal maniera ottenere una perfetta bianchezza.

Alcune sete intensamente gialle non si poterono imbiancare con meno di otto immersioni in ciascuno de' due acidi; ma per altre più pallide talora bastarono quattro. Egli è facile di comprendere che il risultato dee variare secondo la diversa concentrazione degli acidi; ma è uopo non dimenticare che l'acido muriatico ossigenato quando è un po' forte, debilita estremamente la seta. Quindi nella pratica del metodo, che risulta dalle accennate sperienze è opportuno moltiplicare le immersioni, ma procedere sempre con acidi, e soprattutto col muriatico ossigenato, dilungatissimi.

Per le accennate operazioni la seta non diminuisce sensibilmente di peso. Essa conserva tutta la crudezza naturale, la elasticità o flessibilità, non si irrigidisce, e siccome a operare l'imbiancamento si ricercano delle immersioni moltiplicate, così riesce ugualissimo in tutte le parti.

Paragonata colla seta imbiancata secondo il metodo di Baumé, quella imbiancata nella accennata maniera parve migliore a ogni altro riguardo fuorchè nella lucentezza; quella secondo la maniera di Baumé era più vivace, e brillante. Questa circostanza per altro parmi che non sia per riuscire di una grande importanza. Imperocchè la seta imbiancata cruda si destina, nelle arti principalmente, alla manifattura di garze e di veli, nelle quali stoffe poco si pregia la lucentezza.

Gli acidi dilungatissimi che si adoprano, essendo a un di presso di niun valore, l' accennata maniera dee riuscire estremamente economica. Al qual riguardo è da osservarsi, che ogni qual volta la seta si estrae dalla immersione in uno degli acidi, dee essere ben lavata prima di essere immersa nell' altro. Senza di questa attenzione l'acido muriatico ossigenato inerente alla seta distruggerebbe nell' immergerla in esso una porzione del solforoso, e viceversa il solforoso una porzione del muriatico ossigenato. Poichè egli è noto che questi due acidi si decompongono scambievolmente quando reagiscono insieme, cangiandosi l' uno in muriatico semplice, l' altro in solforico.

Ho fatto osservare che per imbiancare la seta è indispensabile di terminare le operazioni con una immersione nell'acido solforoso. Questa circostanza lascierà credere ad alcuno che la seta imbiancata in questa maniera non è atta alla tintura, poichè tra i tintori ne sono molti che credono che la seta la quale ha ricevuto il vapore dello zolfo non sia più atta a ricevere alcun colore. Ma è questo uno de' tanti pregiudizj che sono comuni agli artisti. Osserverò che terminando le operazioni per l' immersione nell' acido muriatico ossigenato si ottiene la seta di un bel giallo chiaro, non altrimenti distruggibile dal sapone come il giallo naturale della seta, e che coll' azzurro forma un bellissimo verde.

Finalmente farò ancora osservare che l' opinione de' tintori volendo, che sopra tutto alla tintura nera renda inabile la seta il vapore dello solfo, o ciò che è lo stesso, l' acido solforoso, con questa maniera di tintura la ho specialmente sperimentata col più felice successo. Ad ogni modo per altro siccome non presso tutti è la stessa la maniera di tingere in nero, accennerò quella che ho praticato, e tanto più volentieri il farò in quanto che questa maniera di tintura a differenza di tutte le altre oltre di un nero elegante somministra un nero che resiste all' azione degli acidi. Essa consta delle sostanze seguenti per cento libbre di seta.

Galla Romana . . .	Libre	16.	4.
Legno Campecce	,,	25.	—
Somacco	,,	8.	4.
Legno giallo , ...	,,	4.	2.
Solfato di ferro	,,	33.	4.
Solfato di Zinco	,,	4.	2.
Solfato di Rame	,,	4.	2.

Intorno alle operazioni di tintura, non altrimenti si procede che nelle altre maniere.

Dello scrudamento della seta, e del glutine della medesima.

È noto a tutti che il glutine della seta è indissolubile nell' acqua, che lo dissolvono facilmente gli alcali ed il sapone il quale si adopera comunemente nell' arte della tintura.

Quando per altro l' acqua si adopera riscaldata a una temperatura un po' superiore a quella a cui bolle comunemente, l'acqua dissolve una parte di glutine. E la seta che si fa bollire in una storta con acqua si scruda considerabilmente.

Il Cittadino Coulomb ha fatto vedere, che se si rinchiude con acqua la seta in una pentola munita di un coperchio che chiuda assai strettamente, e formi così una specie di imperfetta macchina Papiniana, la seta si scruda perfettamente, e come quando si scruda con il sapone diminuisce oltre un terzo di suo peso.

Ma in questa maniera di scrudamento della seta si è osservato, che la seta scrudata conserva una tinta gialla, a differenza di quella la quale si scruda con il sapone nella maniera comune, e che diventa bianchissima. Del quale fenomeno per render ragione si è dovuto formare l' ipotesi, che la materia colorante e il glutine sono nella seta due sostanze diverse, che si possono separare l' una dall' altra;

che l' una e l' altra dissolve bensì il sapone; ma che quanto all' acqua mentre dissolve il glutine quando è riscaldata a una molto elevata temperatura, essa non dispiega sopra la materia colorante alcuna azione dissolvente.

Una sperienza semplicissima mi ha fatto conoscere che questa maniera di ragionare è assai lontana dal vero.

Ho fatto bollire alla maniera di Coulomb della seta con acqua in una specie di marmitta Papiniana. La seta si scrudò, lavata e seccata essa conservava una tinta di giallo, molto diversa per altro da quella che accompagnava la seta nel suo stato naturale.

Ho preso l' acqua in cui aveva bollita la seta, e in cui per ciò stava disciolto il glutine della medesima, l' ho svaporata lentamente a siccità per indi intraprendere sopra del glutine che era stato disciolto alcune sperienze.

Fra le cose che ho potuto osservare, la prima quella si fu di vedere, che questo glutine il quale sintanto che è unito alla seta è indissolubile nell' acqua, lo era perfettamente e anco nell' acqua fredda.

Nella reazione del glutine della seta con l' acqua riscaldata ad una molto elevata temperatura, non è adunque vero che abbia luogo una semplice dissoluzione; poichè il glutine si modifica, poichè il glutine separato manifesta delle proprietà decisive, che da prima non possedeva.

La seta che in questo metodo conserva una tinta di giallo diveniva bianchissima quando si macerava nell' acido solforoso il quale si cangiava in solforico. La tinta gialla di essa al contrario non solamente non distruggevasi coll' acido muriatico ossigenato, ciò che sarebbe accaduto se essa fosse dovuta alla materia colorante gialla, e naturale della seta, ma si faceva all' opposto più intensa.

La spiegazione di questi fenomeni si trova assai naturale nella reazione della seta con l' acqua medesima. Egli è noto che quando si fa bollire del legno, delle ossa nella marmitmitta Papiniana, un circolo di fiamma azzurra si fa vedere all' intorno delle commessure del Digestore, la quale fiamma è sicuramente dovuta alla combustione di un gaz idrogeno, somministrato dall' acqua che si scompone.

Quando in luogo di legna, di ossa, si procede con seta, sebbene a una temperatura minore, la scomposizione dell' acqua ha luogo più facilmente; l' ossigeno di essa combinandosi col glutine della seta lo rende solubile nell' acqua, nella maniera stessa, che lo stesso ossigeno rende solubile negli alcali, e anco nell' acqua il glutine vegetale delle piante da tiglio. Una parte dell' ossigeno istesso si combina colla seta, e la tinge in giallo nella maniera stessa, che la tinge in giallo l' ossigeno che riceve dall' acido muriatico ossigeno, dal nitrico e dalla atmosfera stessa, poichè è ora notissimo che ingiallano molto tutte le stoffe di seta, e di lana, che si conservano all' aria, e che a tutte coll' acido solforoso si restituisce la primiera bianchezza.

Questa maniera di rendere ragione dello scrudamento della seta per mezzo dell' acqua pura, e de' fenomeni che essa presenta, si è potuto confermare ancora con un' altra sperienza.

Io ho fatto macerare in acido muriatico ossigenato dilungatissimo della seta, poi la ho sottomessa all' azione dissolvente dell' acqua a differenti temperature; e ho trovato che l' acqua riscaldata a una temperatura di 60 a 80 gradi scruda benissimo la seta cruda in proporzione della quantità di ossigeno che fu somministrato al glutine.

Quando si tratta la seta con acido muriatico ossigenato, e successivamente con acido solforoso, e si ripetono due o tre volte le macerazioni alternativamente; se la seta che in tale modo acquista una bianchezza considerevole si fa digerire in acqua quasi bollente, si osserva che all' intorno di ciascun filamento si forma una nebbia gelatinosa, e una spuma bianca si raccoglie alla superficie del liquido.

Ripetendo tre o quattro volte la macerazione negli acidi, e la digestione nell' acqua bollente si ottiene perfettamente scrudata.

Questa maniera di scrudamento è complicata di troppo, nè io consiglierò di adottarla di preferenza alla maniera comune semplicissima con il sapone, e soprattutto all' altra migliore ancora proposta da Chaptal con il vapore dell' acqua. Ma questo metodo di scrudamento può prestare de' grandi soccorsi all' altro di imbiancarla conservandone il crudo, imperocchè si può così ottenere bianca la seta, e conservare tutta o poca, o quel grado che più aggrada nella sua crudezza; ciò che può riuscire molto importante per molte manifatture, nè si potrebbe ottenere colle altre maniere.

I PRINCIPJ DELLA MECCANICA

RICHIAMATI ALLA MASSIMA SEMPLICITA' ED EVIDENZA.

Ragionamento di Pietro Ferroni

Ricevuto il dì 27 Dicembre 1802.

> . . . . *Juvat integros accedere fontes*
> *Atque haurire.*
>
> (Lucretius De Rer. Nat. Lib. I. vers. 926.)

Tutte le Scienze speculative, perchè a ragione si dicano esatte, dovrebbero avere nei principj loro fondamentali un' evidenza intuitiva. Nulladimeno la Meccanica, che in astratto considera l'estensione impenetrabile, e perciò mobile, come la Geometria l' estensione penetrabile e figurata, sono state per il passato e sono eziandio di presente due facoltà ben diverse in proposito della chiarezza ed aurea semplicità delle prove dei pochi teoremi iniziali, da cui respettivamente dipendono. Nella Geometria tutto posa o posar potrebbe sul combaciamento ossia identità sì di costruzione che di grandezza (ammessa ancora compenetrabilità de' suoi Corpi ed angoli-solidi e la soprapposizione de' triangoli-sferici, o convessi e concavi, o convessi e convessi), non meno che sopra l' evidente trasformazione o correlazione delle figure; ed applicandole l' Algebra non havvi parimente alcun calcolo, per quanto sublime esso sia, che non si appoggi in ultima analisi alla trasformazione dell' espressioni *speciose* o alla derivazione da limpidissime formule primitive. Per il contrario le dimostrazioni dell' equilibrio, dalle quali in sostanza hanno origine tutte le teorie più recondite sì della Statica che della Dinamica, appariscono (ad eccezione di pochissimi casi che pel motivo d' identità vanno in conto d' Assiomi) oscure, indirette, manchevoli, e non conducenti a quell' intima persuasione dell' animo ch' eccitar sogliono le Matematiche, e segnatamente l' elementari. Se questa evidenza, se questa facile e nitida concezione non fosse mancata in chi apprendeva i rudimenti della Meccanica, non si sarebbe mai messa in questione o problema, come più volte si è fatto, (e lo rammenta in ultimo Foncenex) la necessità o contingibilità delle leggi dell' equilibrio o del moto, che immediatamente sieguono dalle prime posta che sia l' esistenza della materia; nessuno avendo mai dubitato (purchè non privo di senno) che necessarie non fossero, siccome avverte Bailly, a riguardo dell' estensione e della grandezza in genere le verità geometriche ed analitiche. Quei fra i Geometri, che sovvertendo il natural ordine delle idee presero in prestito, specialmente dalla Barologia, le affezioni meccaniche de' corpi solidi, e le trasportarono alla ricerca delle proprietà delle figure geometriche, sono a parer mio reprensibili al pari degli altri, i quali come se disperassero di poter mai stabilir cón saldezza i fondamenti della Meccanica senza disturbare la filiazione o la sincera genealogia delle scienze, pretendono di ricavarne le prove dalla teorica delle *funzioni*. Manifestarono poi l' impotenza in cui erano d' attingere alla pura sorgente le prime regole dell' equilibrio, quando i Matematici assunsero per principj della Statica, non meno che della Dinamica, le conseguenze o vicine o remote, che nascevano dai presupposti principj medesimi ed erano per la più parte meramente geometriche, come *massimi*, *minimi*, conservazione dello stato del centro di gravità, delle forze vive, dell' azione, de' momenti d' inerzia, proporzionalità delle aree a' tempi, ec., non altrimenti che quando (diversamente dal metodo osservato da Monge che ne fece teoremi) intesero di spiegar l' equilibrio, o sivvero la quiete o riposo forzato attuale d' un sistema di corpi sollelecitati, immaginandolo rotto o disturbato per via di moto o velocità *virtuale;* e peggio ancora abusarono, non che della Logica, della stessa Poesia metafisica, ricorrendo per render contezza della ragione dell' equilibrio e del movimento all' improprietà (direi quasi temerità con Cartesio e Mairan) delle cause-finali.

Malgrado gli esempi di tanti uomini sommi, quanti da poi ch' è nata o risorta la Filosofia-naturale, o non si rivolsero a scrivere le Istituzioni della Meccanica coll' istess' ordine, precisione, facilità, chiarezza e rigore nei suoi principj, come i Greci Elementi di Geometria, o lo tentarono invano, o solamente lo fecero in parte, abbandonando quindi il pensiero del rimanente, io reputo contuttociò che agevolmente abbiasi modo di ben riescirvi; e questo di subito si conseguisca con ampliare, ferma stante la stessa evidenza, il primo Postulato o per dir meglio indubitato Assioma, dal quale Archimede incomincia i suoi II. Libri *degli equiponderanti* (ἰσοῤῥόπιων), o più testualmente *degli eguali momenti* de' corpi, anco senza lo stretto rapporto alla gravità, cui ebbe intenzione di limitarsi il Geometra di Siracusa; essendo quell' unico fondamento, esteso quanto convenga, per tutti gli effetti valevole a sostenere colla massima saldezza l' edificio, che sopra vi s' innalzasse, della Meccanica-razionale. E se ciò ch' io penso su tale articolo ed ebbi sempre presente sin da parecchi anni indietro, raccogliendolo adesso, abbenchè delibato più che compiuto in questo breve mio Scritto, s' uniformasse per avventura al sentimento, che ho in sommo pregio, dei valorosi Analisti viventi (ai quali, e massime a quello „ che sopra gli altri com' Aquila vola „ rimarrà nullameno tutto intero il merito raro ch' essi si sono acquistato avanzando la scienza coll' ajuto de' nuovi calcoli, e colle loro pellegrine speculazioni all' apice della sua gloria, sebbene fidatisi a dei principj poco lucidi ed indiretti, cui per porre in sicuro e sottrarre da ogni dubbiezza è stato poi necessario ritorcer cammino, e tentare di confermarli colle regole solite dell'equilibrio nel paralellogrammo delle forze, nella leva, o nelle troclee composte), vorrà dire sì fatto consenso che agli Elementisti, che verranno dipoi, servir possa di guida e riforma ad un tempo il nuovo mio piano, all'effetto di dilatare i confini purtroppo angusti dell'evidenza. Nè sarebbe questa la prima volta che dopo d'essersi segnalati molti sagacissimi ingegni, chi in una chi in altra maniera, a riordinare secondo le proprie vedute in corpo di dottrina le Scienze esatte, lo che appartiene a dei Filosofi singolari e soli degni di saper togliere l'inutile ridondanza, e sanare il difetto delle dimostrazioni meno severe introdotte negli Elementi di qualunque siasi liberal disciplina, tornar si debba agli stessi principj lasciatici più di due mila anni fa dagli antichi; di modo che, come finalmente ai dì nostri Legendre ha ricalcato per la geometrica Sintesi il sentiero medesimo della Scuola celebre d'Alessandria, così ancor io vada provandomi adesso a riedificare la Statica sulla bilancia notissima d'Archimede, d'Aristotele o d'altri, che avanti di lui si saranno naturalmente occupati di render ragione dell'equilibrio. Cresce tantopiù di valore il divisato principio della bilancia ossia vette di braccia eguali, in quanto che consideratolo come conviene, s'adatta altresi alla spiegazione evidente e spedita dell'equilibrio de'fluidi (e per conseguenza secondo i ritrovati moderni eziandio dell' Idrodinamica); laonde viene a cessare la supposta difficoltà di concepimento del livello d'un liquido in un sifone di vario calibro o diametro nei suoi due rami, il qual fenomeno da Stevino in poi è passato quasi sempre per maraviglia, e fin da principio perciò ebbe il nome autorevole di *paradosso idrostatico*.

Dei tre sommi-capi, ne'quali tutta si riconcentra la dottrina della Meccanica in generale, cioè I. l'inerzia della materia, II. la leva, III. la composizione e consecutiva scambievole risoluzion delle forze, il primo (avvengachè Foncenex e Dalembert siansi proposti di dimostrarlo, come De Wolff si credette in dovere di provar gli assiomi sulla grandezza) non ha per mio avviso nessun bisogno di prova, stante che incontanente egli nasce dalla proprietà unica presupposta nei corpi, vale a dire dall' impenetrabilità, che di sua natura e in virtù della stessa definizione, che suol premettersi a tutti i Corsi elementari di quella scienza, è meramente passiva. E difatti non v' è chi non veda (e l' istesso prelodato Analista Francese dovette alla fin confessarlo) ch' e' sarebbe incongruo ed assurdo altrettanto lo scemarsi un corpo o accrescersi da se medesimo la velocità comunicatagli, o cambiarsi la direzione del movimento ricevuto da causa esterna, quanto il darsi moto o toglierselo da se stesso senza causa attiva nessuna; non essendo nè potendo esser causa di questo effetto residente nella materia d' impenetrabilità, la quale solamente esclude o impedisce nel mutuo concorso la coesistenza di due corpi in un luogo (ch' è motivo necessario, non di generazione accelerativa o ritardativa, ma di comunicazione d' impulso, alla pari delle pressioni, tensioni di verghe o di fili, e simiglianti forze passive, come Fontaine ha il primo avvisato colla sua universal legge dinamica), e non passando dal più al meno differenza assoluta, nè la modificazione d' un effetto dipendendo mai da una causa d' indole differente da quella, che sia valevole a generarlo. Ma dato ancora che la materia avesse inerenti alla sua natura, che tuttavia non lascia d' esser mistero pei pensatori, alcune occulte forze universali o particolari, quali sarebbero monadi, attrazione, repulsione, vitalità, eccitabilità, elaterio, ed altre consimili, la Meccanica dee riconoscerle sempre come se fossero forze attive separate ed estrinseche; conciossiachè non considera qual sua unica base se non se l' impenetrabilità de' corpi e per conseguente la loro mobilità: in questo non diversa dalla Geometria, che astraendo da tutte le fisiche affezioni, solamente estesi gli presuppone e perciò figurati, non altrimenti che una limitata porzione di spazio o di vuoto.

I due rimanenti principj sono di tal maniera collegati in-

infra loro, che facendo dipendere il vette dal paralellogrammo o triangolo delle forze, o più generalmente dalla macchina *funiculare*, o poligono *statico* situato nel medesimo piano o in piani diversi, con tutta facilità si potrebbero coacervare in un solo, com' adoprarono quasi ad un tempo Newton e Varignon, e ne furono con magnifici elogj dai Matematici di quell' età e dai posteriori ancora ricompensati, avanti che questi si facessero accorti della lacuna che rimaneva nei fondamenti della Meccanica, atteso la deficienza di prova inappuntabile, e vittoriosa in proposito del teorema di Stevino sulle forze composte, per quanto pare dagli antichi non ignorato, e molti secoli dopo convalidato prima di tutti mediante una dimostrazione geometrico-analitica da Daniello Bernoulli. Se non che riflettendo all' ordin sintetico degli Elementi, che impone a chicchessia di procedere immancabilmente dalle nozioni semplici alle meno involute e quindi alle più elaborate, e concatenarle a grado a grado per via di lucido progredimento, sul modello unico somministratoci dal magistero della Geometria, che non discende già dai poligoni e poliedri ai triangoli e solidi tetragoni piramidali, o sivvero dai generali a' particolari, ma piuttosto dagli ultimi sale ai primi, e d' altra parte ponendo mente che nulla in sostanza si giovò per sì fatto cammino alla scienza, col dedurre cioè dalle inflesse le leve diritte, o dal caso delle forze convergenti quello delle direzioni paralelle delle medesime, mentre non era ancor dimostrato con tutto il rigore e semplicità l'equilibrio, o la *risultante* di due forze qualunque facienti angolo infra di loro, tornerà più in acconcio (come desiderò Dalembert) salvare insieme i precetti della Sintesi e quelli della chiarezza, non mai discordanti dalla naturale succession delle idee, e così lasciar fermi e sottoporre al cimento d' un raziocinio facile e convincente, come se fossero indipendenti, entrambi i principj radicali della Meccanica, onde coglierne quindi il frutto solo d' una vicendevol conferma.

Ben lontano dall' ingolfarmi nell' abisso immenso della Metafisica, la quale in Fisica non dovrebbe comparire giammai, eccetto che per sempreppiù rilevarne l'assurdità dell' applicazione, vado dunque a fondare (e stabilmente se non m' inganno) tutta la Statica sulla generalizzazione della bilancia a due sole braccia, non menomandone in nessun conto quella luminosa evidenza, mercè di cui sì dagli antichi che dai moderni, o sapienti o volgari, è sfuggita agli attacchi di qualunque cavillo o sofisma di coloro, che alcuna volta si attentarono indarno di minare i fondamenti della Meccanica, incominciando (per quanto Aristotele e Diogene Laerzio ci narrano) da Parmenide, Melisso, Xenofane e Zenone d' Elèa. Questa generalità, che Archimede non vide, o chiunque scrivesse i rammentati due Libri *de' Centri di gravità*, suggerisce il facil passaggio dalla bilancia di più di due braccia al vette o stadera Romana o Svedese, ed all' equilibrio di tre forze colle direzioni loro concorrenti in un medesimo punto: il rimanente non è altro che deduzione da indubitabili, nitidissime, eterne proprietà geometriche de' poligoni regolari. Mi giova chiamare per la più semplice intelligenza col nome *d' identità* l' assioma unico, intorno al quale raggirasi l' argomento importante, di cui ragiono; ma lascierò volentieri, per non menar rumore o metter briga a motivo d' una parola, nè troncare il mio filo in grazia di dispute vane, ch' altri lo appellino come sia di loro maggior piacimento, *indifferenza* (ἀδιαφορία), *ragion sufficiente*, o principio della *contradizione*, anima e fonte d' ogni sapere. Basta che apprenda ciascuno come di prima evidenza e innegabile (a scanso di cadere negandolo nella giusta taccia d' uomo stupido o folle) il perno solo e antichissimo e da tutti o in una maniera o nell' altra o espressamente o tacitamente adoprato, sopra il quale riposa, se mal non iscorgo, la teoria universale dell' equilibrio e del moto; abbenchè molti, anco fra gli speculatori più fini, persistano non essere profondamente convinti che sia impenetrabile questo scgreto della Natura, e che disvelarlo o strapparlo dalle sue mani torni lo stesso che *imbrem in cribrum ingerere*, già posto di sovente in proverbio dai Classici più accreditati della Grecia e del Lazio. Hanno però diversi insigni Geometri, e massime nel declinare del secolo scorso, dopo perfezionata l'Analisi-sublime e dopo cresciuto, anzi fatto comune lo spirito d'investigazione scientifica, che rende l'uomo indagatore ardito ed incontentabile finchè gli restino da rischiarar dei misteri, sperimentata la propria sagacità nella ricerca della sovrana evidenza dell' equilibrio: ma palesare con minutezza ed esporre adesso con critica giusta quali sian state le loro mosse felici, quali gli inciampi, dove mi abbiano aperta o spianata la strada, cosa rimanesse precisamente a desiderarsi, ove sia che s' incontrino meco, quando e perchè io disconvenga da questi, ed altrettali particolarità più dicevoli alla Storia matematica che allo scopo, cui mira il presente discorso, sarebbe un commentario troppo prolisso, di cui darò qualche cenno in alcuni dei Corollarj, e Scolj seguenti a maggior lume dell' oggetto intrapreso a trattare, rimandandone il resto, non meno che tutte le molte citazioni testuali e fedeli da me raccolte in forma di Note, all'Opera che ho preparata e non ancora forbita FUNDAMENTA MECHANICES.

Postulato.

La Meccanica razionale a differenza della pratica esige che le forze sollecitanti sianò considerate come indivisibili punti attivi, rappresentando la direzione e proporzione di esse per mezzo di linee rette; come punti indivisibili e perciò senz' attrito si considerino i centri ed appoggj; come linee rette geometriche indistendibili i fili e pieghevolissimi all' occasione fuor d' ogni menoma resistenza; e finalmente come linee rette geometriche rigidissime ed in nessun modo incurvabili le verghe o prementi o tiranti, mercè delle quali, non men che dei fili senza niun pericolo di rottura o di piegarsi *a sacca*, si trasmette o propaga l' azione in distanza, quando manchi l' immediato contatto.

Definizione.

Equilibrio o riposo è quello stato d' un sistema di punti passivi legati insieme per via di fili o di verghe e animati da forze sollecitanti, in grazia di cui atteso il contrasto delle medesime e delle resistenze, il sistema rimane immobile affatto, ch' è quanto dire privo di moto progressivo o di traslazione ed insieme di moto di rotazione. Differisce in ciò dalla quiete, che quest' ultima nasce (come benissimo avvisa l' illustratore di Formey) da privazione di forze, l' altro dalla loro presenza e bilanciamento o stabile o instabile.

Assioma.

Se alle estremità di tutti i lati o spigoli eguali d' una qualunque piramide poligona regolare, dalla parte ove sarebbe la base, s' adattino pari forze, e la direzione di ciascheduna andando pel medesimo verso sia in un piano che passi per l' asse della stessa piramide, e faccia angolo eguale col suo spigolo o *vento* o tirante respettivo, mentre venga immobilmente appoggiato o sostenuto l' apice o vertice della medesima immateriale, invariabile ne' suoi angoli e vuota piramide, questa Bilancia composta o piramidata resterà in equilibrio. Nè solamente la *risultante* di tutte quelle eguali forze, ora più ora men cospiranti, non potendo essere se non che unica, passerà in conseguenza pel divisato punto d' appoggio, ma oltrediciò in virtù della distribuzione simetrica o euritmica sì dei tiranti, *venti* o braccia della Bilancia composta (Fig. 1.) che delle forze, farà angoli eguali colla direzione di ciascheduna (proprietà intuitiva che Varignon e Daniello Bernoulli contemplarono per sole due forze), e combinerà esattamente colla direzione e posizione dell' asse dell istessa piramide, o padiglione regolare foggiato a *carcassa* o scheletro di linee rette, o angolo solido come dicono *forato a giorno* parimente regolare, che torna a dire, colla retta condotta dal centro al punto unico di concorso o d' unione delle direzioni *simili* di tutte le forze.

COROLLARIO I.

È di per se manifesto che le Bilancie raggiate, multifide, in figura di stella o *asteroidi*, purchè alle condizioni medesime come sopra, cioè che tutti i raggi ed angoli centrali, o pari o dispari di numero, siano eguali infra loro, ec. (Fig. 2.), rappresentano un caso particolare, indicato appena da Roberval, del premesso evidente generale equilibrio. Difatti avendo due limiti la piramide testè considerata, uno, quando l' apice o punto d' appoggio viene assorto nell' infinito e si trasforma quella nei spigoli o costole immateriali d' un prisma rettangolo regolare, l' altro che or contempliamo, ed è la sua projezione ortogonale sul pian della base col punto d' appoggio nel centro, e verificandosi sempre senza niuna eccezione l' equilibrio nella Bilancia piramidata, più o meno svelta o saliente, più o meno schiacciata o compressa, diritta o rovescia, debbe ancora di ragione aver luogo nell' *asteroide*, che fra le piramidi diritte ed inverse è intermedia, come ad entrambe comune. Quindi n' accade che la *risultante* di tutte le forze eguali ed egualmente disposte, eziandio in questo caso particolare, coincida colla direzione della perpendicolare o normale al piano della Bilancia *asteroide*, che si parte dal di lei punto d' appoggio, centro e vertice insieme del precitato limite della Bilancia piramidata, e combini coll'asse della medesima il quale passa ancor quì pel punto unico di concorso delle direzioni di tutte le forze.

COROLLARIO II.

Singolarissimo adunque a fronte dell' Assioma precedente apparisce di subito l' equilibrio in una Bilancia scempia (Fig. 3.), qual è appunto l'Archimedea, o in una Troclea circolare ossia Bilancia *perpetua*. Stando al puntual modo, nel quale la immaginaron gli antichi ed i più de' moderni Meccanici, ell' è una linea retta orizzontale o di livello, il cui mezzo è sostenuto o posa sovr' un punto d' appoggio, mentre dai due estremi pendon due pesi o forze prementi eguali in direzioni cospiranti, paralelle e perpendicolari alla linea dei due raggi distesa in una medesima dirittura. Ma vi si possono con Roberval surrogare due altre forze qualunque siansi stiranti o prementi per l' istesso verso, e facienti qualunque angolo, purchè eguale, con ambedue le braccia della Bilancia (Fig. cit.), ed avremo sempre equilibrio. Conciossiachè Bilancia sì fatta somministra l' esempio semplicissimo d' un' *asteroide* bifida a due soli raggi ed angoli eguali, e gli ultimi di 180.° per ciascheduno; nè possono e questa e la prima mancar d' avere pel principio d' *identità*, come tutte le altre multifide, delle quali fan parte in linea di termini particolari della serie innumerevole delle medesime, la direzione o posizione della *risultante* pel punto dividente a metà la loro verga o traversa, e perpendicolare alla retta che unisce insieme i due raggi, staccatasi dall' istesso punto di mezzo, nella qual linea normale stanno anche i due punti, uno d' appoggio e l' altro di concorso delle direzioni d' entrambe le forze, posto eziandio che il secondo a motivo del paralellismo si perdesse nell' infinito.

COROLLARIO III.

Anzi agevolmente riceve una nuova ampliazione la Bilancia scempia del Corollario prossimo superiore, considerandola inflessa più presto che diritta (come nelle Troclee a forze pari convergenti tangenziali spiegò Varignon, e dopo di lui Bossut, Monge, ec.), salvo però tutto il complesso delle rimanenti condizioni ivi diffusamente avvertite. Imperciocchè (Fig.4.) quantunque sia vero che tal Bilancia non resti compresa nella specie delle *asteroidi*, dessa appartiene nulla di meno al genere delle piramidate e dimostra quel facilissimo caso, nel quale il padiglione lineare convertasi in due soli tiranti o spigoli, situati nel medesimo piano insieme coll' asse sempre fermo della piramide. E niente mutandosi per rapporto al principio d' *identità*, ch' è il fondamento dell' Assioma premesso (riconosciuto per evidente nelle Bilancie *similmente* arcuate e molto più nelle inflesse dallo Scoliaste d'Archimede, e quindi da Fermat e Roberval precitato nelle circolari e angolari o nelle diritte anco a forze convergenti, e da Newton ove deduce da quelle l' equipondio nel Vette), sarebbe ora superfluo intrattenersi di più a ricordare le conseguenze necessarie medesime della direzione della *risultante*, e dell' equilibrio delle eguali due forze parimente quì contemplate.

COROLLARIO IV.

Evvi un caso, rapporto a cui l' equilibrio nelle Bilancie *asteroidi* siegue senza la solita *risultante*, e perciò senza carico o pressione sul punto d' appoggio; quando cioè tutte le forze eguali tirano o pigiano ciascheduna secondo la direzione dei raggi, e in vece d'essere più o men cospiranti relativamente alla normale inalzata dal centro sul piano della Bilancia, giacciono in questo piano ed ivi sono in contrasto di tal maniera, che si distruggono scambievolmente e s' elidono, onde la *risultante* viene a riguardo della normale medesima annichilata, e per virtù della sua nullità, non meno che del contrasto suddetto, sussiste anco in questa supposizione (Fig. 5.) il medesimo generale equilibrio. Fatta l' ipotesi della trazione non v' ha dubbio che in simil caso tanto valgano i fili, quanto le verghe. Questo è un esempio particolare dell' equilibrio evidente d' un punto libero sollecitato simetricamente nel medesimo piano da quante forze mai vogliansi (senza mescolanza nessuna di resistenze estrinseche, veri appoggi, sostegni o altre simili forze passive), le di cui *risultanti* finalmente si riducano a sole due, eguali e direttamente contrarie; come pel caso di tre forze simetriche Dalembert non mancò di riconoscerne l' evidenza intuitiva. Del resto una Bilancia scempia con angoli di 180° è il primo modello speciale (Fig. 6.) d' equilibrio intuitivo, una trifida (Fig. 7.) con angoli di 120° somministra il tipo secondo dell' equilibrio senza bisogno di vero punto d' appoggio, intorno il quale più o meno elaborato tutta s' aggira e da cui intera dipende (come farà chiaro il II. Articolo) la teoria del paralellogrammo delle forze composte. Se non che bilanciatesi così le forze pel mutuo contrasto subentra allo *zero* della *risultante* nella direzione della normale, o alla pressione annullata sopra il punto d' appoggio, lo stiramento o pigiatura massima da tante parti, quanti sono i raggi, del centro dell' asteroide, ossia nodo della regolar macchina *funicolare* o trattoria o torcularia o premente che debba dirsi. Nè il caso particolare, di che si parla, dee credersi per avventura un' eccezione alla regola dell' universale Assioma. Perchè come nel limite prismatico della piramide (Corol. I.) la *risultante* colla sua massima attività nella perpendicolare, cioè con tutto intero lo sforzo suo carica il punto d' appoggio, e manca ogni sforzo contro del centro per le direzioni de' raggi, così viceversa nell' altro limite del piano o base *asteroide* manca di necessità la prima *risultante* normale, e tutta impiegasi l' energia, tutta la forza raggiante nel centro; esistendo poi insieme e modificandosi a grado a grado sì l' uno che l' altro sforzo nelle innumerevoli situazioni intermedie.

Sco-

Scolio.

Varie ed a mio parere pregievoli sono le osservazioni, che dopo lette le cose premesse si affacciano chiare alla mente degli intendenti.

1. L' Assioma unico antecedente, cui la Meccanica tutta è subordinata, poteva improntarsi con generalità maggiore di quella, alla quale lo vediamo ristretto; perchè a gettare i fondamenti della scienza così proposto era ancora di troppo abbondevole. Per esempio se in vece d' un padiglione regolare di linee rette immateriali, a un solo piano ossia ordin di forze, si fosse quello ideato a più ordini, purchè in ogni ordine separatamente dal valore dell' altre s' agguagliassero infra di loro tutte le forze predette; se più padiglioni regolari diversi di grandezza e di forma si fossero soprapposti gli uni agli altri nel comun vertice, e tutti a più ordini di forze come sopra, ma euritmicamente distribuiti infra loro; se da alcuni o da tutti i tiranti ma in simetria, a uno o più ordini ma con euritmia, si fossero diramate altre rette immateriali, ed a questi rami applicate delle nuove forze colle medesime condizioni, e si fossero gli ultimi diramati simetricamente da capo ancor essi, e così senza fine; in somma se la macchina simetrica immateriale si fosse finta (ma con geometrica perfezione) verticillata, a lumiera scempia o fornita di più ordini di viticci, a pomo, a pina o embriciata, ciniriforme o squammata, o in figura di solido rotondo intero, troncato, diritto, rovescio, scannellato, striato, o a foggia di boccie, di fiori scempi, composti, doppj, stradoppj, umbellati, o uniti a dei flosculi con regolarità e simetria, come la Botanica gli presenta e la Natura e l' Arte gli mostrano in modelli meno perfetti nelle selve, nei prati, ne' campi, negli orti, e con più bizzaria nei giardini; tutte queste infinite maniere di congegnar dei tiranti e delle forze in ordini euritmici ed armoniosi, non meno che le lor projezioni va-

variamente raggiate e ramose, ossiano *asteroidi* doppie, stradoppie, flosculose, o comunque ma con simetrico magistero d' ordito e trama composte, porterebbero all' equilibrio. Imperciocchè la *risultante* di tutte le forze non potendo a meno d'essere determinata e per conseguente unica, e d'altronde la regolare configurazione esigendo mercè del principio solito dell' *identità*, che la *risultante* medesima si referisca a tutti i tiranti egualmente (come quella, di cui non v' è nè sa concepirsi ragione di preferenza, ond' essa s' accosti più all' uno che all'altro), la di lei direzione sarà evidentemente combiciante coll' asse dell' angolo-solido, che gode solo di tal requisito, o scempio o aggruppato ch' e' sia, e passerà pel punto d' appoggio o di sospensione.

2. In oltre risalta, non che all' intelletto, agli occhi d' ognuno, che Varignon ponendo per base della sua *Meccanica nuova* la macchina *funicolare* piana, piuttosto che rappresentarsela tutta giacente in un piano, avrebbe satisfatto assai meglio all' evidente universalità del principio, ch' egli assumeva, figurandola piramidata o in angolo-solido regolare. Nè solo analoga alla Bilancia semplice d' Archimede è la *funicolare* diritta (Concl. IV. Fig. 6.) coll' unica differenza, che là agiscon le forze perpendicolarmente al tirante, quì rivoltate ed in senso opposto nella medesima direzione del filo; ma e questa e quella sono strettamente congiunte col gran principio della Dinamica, unico dotato del privilegio dell' evidenza, siccome opinò Dalembert e non ha guari ha pensato Lagrange, cioè l' equilibrio di due identici parallelepipedi o sfere prementisi con forze eguali, ogni ragione mancando perchè nel conflitto delle medesime prevalesse una all' altra. E difatti questa pressione (immaginando una verga intermedia che non cambia l' assunto) è la trazione rovescia della *funicolare* bifida (l. c.) o sivvero la Bilancia analoga Archimedea, e tanto ha d' affinità seco lei, che restando salda e inconcussa l' istessa evidenza intuitiva, se più paralellepipedi o sfere, o se più molecole (lo che av-

viene de' fluidi supposti mobilissimi e perciò privi d' ogni coesione), premessero come in una Bilancia raggiata (Corol. I.), poliedra o sferica (Num.° 1.), ossia nel modo generalizzato da Darcy e Fourier, un regolar corpo centrale, parimente v' indurrebbero l' equilibrio pel principio solito d'*indifferenza*, che piacque così chiamare ai Riccati per rapporto a tutto un sistema; il che nella comunicazione del moto per via d' impulso, e massimamente moltiplice, ignorata dagli antichi, sbagliata da Cartesio, negletta da Galileo, posta in essere da Wren, Wallis ed Huygens poco men che ad un tempo, non v' ha chi non sappia essere della maggiore importanza. Bilancia ella è parimente, e semplicissima d' Archimede, l' eguale altezza delle due colonne di liquido omogeneo in un sifone dello stesso uniforme calibro per tutto, e ricurvo in maniera da far angoli eguali con una faccia e coll' altra della sezione infima o base comune. Ma se tu, equilibrata da prima con pesi pari quella Bilancia, togliessi da un dei bacini porzione di peso, e contemporaneamente pigiassi con forza egualmente appunto al peso sottratto l'istesso bacino, o viceversa se tu aggiungessi altro peso ad un dei bacini sgravandolo o sorreggendolo d' altrettanto ad un tempo con una pressione di sotto in su, resterebbe disturbato perciò il primiero equilibrio? Nò certamente; e nò tampoco nei due parallelepipedi Alembertiani bilanciati pel mutuo contrasto, subito che tu menomasti o accrescesti la massa d' uno di loro, ricompensando il tolto con aumento di pigiatura sul resto nel primo caso, o rimediando con equipollente stiratura opposta (o pression negativa) al superfluo aggiunto nell' altro, onde mantener l' equilibrio tal qual era in principio. Ora, se tu ben rifletti, il caso è questo del tuo sifone, tanto a cono troncato rovescio, quanto a cono troncato diritto in un dei suoi bracci, rimanendo cilindrico l' altro: perocchè nella prima ipotesi il di più del liquido viene ad essere visibilmente sorretto dalle pareti del vaso, e nel secondo (come avverte benissimo Atwood) forzate le pareti istesse dal carico reagiscono e pigiano altrettanto all' ingiù , quanto ſarebbe appuntino, se ſosse in posto col di lei carico, la parte tolta o mancante di liquido. Avvengachè entrambi i casi si spieghino coll' istessa evidenza desunta dalla Bilancia, il primo ha appena svegliata l' ammirazione dei Fisici, mentre il secondo si legge sempre qualificato poco meno che di miracolo, in grazia d' una delle pur troppo frequenti contradizioni dello spirito umano. Ricorrere per decifrarlo alle velocità *virtuali*, come il primo s' avvisò Galileo e quindi Cartesio, Pascal ed il Grandi, glossatore delle *Galleggianti* del nostro Linceo, lo conto per opera affatto frustranea: persister tuttora nel nominarlo *paradosso idrostatico*, oltre ad infievolirne nell' animo altrui l' originaria evidenza che lo accompagna, spetterà a quelli soltanto, i quali vogliano singolarizzarsi con abiurar la ragione, a fine (forse) di meritare per questo mezzo dai posteri l' apoteosi. E poi tal soccorso indiretto, che se non viene dal Capo della scuola peripatetica in quanto avvi luogo di sospettare, applicato da principio alla Leva non è certamente di Galileo (abbenchè molti ne diano l' onore al medesimo e infra questi Lagrange, ed altri non ben consapevoli della Storia civile e bibliografica da ciò prendan motivo per farne corte al Gran Duca Ferdinando II., come secondo loro partecipante della scoperta), e piuttosto si debbe allo Scoliaste d' Archimede ed al Giureconsulto Varron di Ginevra, deducendo lo stato del riposo, il quale esiste di fatto, da quello del moto, che non esiste ed anzi nel riposo supposto è impossibile, spegne la face dell' evidenza o la oscura non poco a sentimento di Parent e Daniello Bernoulli, e par che urti di fronte la Logica. Ma comecchè per assicurarsi della certezza di questo principio immaginario subalterno ed obliquo, ſarebbe a ogni modo mestieri di retrocedere e ricollegarlo colla legge fondamentale dell' equilibrio rivolgendosi per un circolo vizioso, convien solo ammirare bensì la fecondità somma di tal felice finzione, che signoreggia in tutta la Statica e la Dinamica, da poi specialmente che Wallis, Keil, Giovanni Bernoulli nella sua Lettera classica (quantunque in contradizion seco lui), Maupertuis, Courtivron, Rutherforth, Euler, e sopra tutto l' Autore della *Meccanica analitica*, Carnot poco avanti di esso, Fourier, Prony, Laplace ed altri espositori moderni la fecero a grado a grado poggiar tant' alto, quant' oggi vediamo, mercè del possente istrumento del calcolo, il quale non giunse però a poter donarle giammai la desiderata evidenza; poichè tale non è rimandando il principio alle troclee, al paralellogrammo e alla leva.

3. In chi abbia pratica della lettura delle opere geometriche d' Archimede o del suo dotto illustratore Maclaurin, e si rammemori il rigor sommo ed anzi lo scrupolo che vi campeggia, fino al segno di non permettersi mai, a scanso delle prove lunghissime negative per *esaustione*, nemmeno il vocabolo di poligono infiniti - latero o limite parlando del Circolo, dee far molta impressione il secondo Postulato o Assioma proemiale del Libro I. degli *Equiponderanti* testè citato (Corol. II.), che letteralmente è concepito così — *Petimus . . . . . aequalia vero gravia suspensa ab inaequalibus longitudinibus non librari* —, e venga quindi proposto e dimostrato come Teorema nella Proposizione II. — *Inaequalia gravia ab aequalibus longitudinibus suspensa non librantur*. — Eutocio d' Ascalona, che pare autore vissuto verso la metà del secolo VI., nel suo Comento rammenta Gemino assai più antico di lui (perchè insegnava in Rodi circa un secolo avanti dell' Era volgare), il quale protesta dell' evidenza somma di quel Postulato, convalidandolo egli medesimo nel riportar quest' autorità, come di per se manifesto al buon-senso. Huygens che con ragione trovava Archimede in difetto quanto alla prova dell' equilibrio nella Leva, accolse contuttociò il secondo suo Postulato, che dee chiamarsi per lo meno dubbioso senza dedurlo dalla Bilancia (vedasi Parte II. del Teorema dell' Articolo I.); e niuno ch' io sappia dei molti Geometri comentatori ha avvertito (eccetto forse

Guidubaldo) che il Teorema era piuttosto Assioma, e l'Assioma Teorema. Conciossiachè posto il primo Assioma della Bilancia semplice (Corol. c.), non ha bisogno di prova ma è conseguenza immediata di quello il teorema, dovendo esser unica e non già indeterminata a pari distanze dall' ipomoclio la condizione dell' equilibrio: non così l' assioma, che mette in linea di conto (per quanto Huygens non l' avvertisse) la diseguaglianza delle distanze dal punto d' appoggio, ch' è un elemento nuovo, non considerato per l' avanti nella Bilancia e nascosto nella teoria de' *momenti*, a stabilire la quale vengono appresso le dimostrazioni che compongono il Libro. Bellini, Marchetti e Vanni tra gli Italiani, fidatisi forse di questo metodo adoperato dal Geometra Siracusano, reputarono ancor essi evidente che i *momenti* di pesi eguali non solo crescessero a maggior distanza, ma seguitassero la proporzione diretta delle distanze dal fulcro, e si fecer plauso a vicenda d' aver semplificata la Statica e rincarato sopr' Archimede mediante una pretta petizion di principio. Non mi pare quì luogo opportuno d' esaminare con savia critica d' onde possa esser nata quella mancanza di nesso o quella disposizione prepostera dei due indicati argumenti (rilevata eziandio da Ugo Hamilton), che così posti come son oggi nel Testo, farebbero torto all' acutezza d' ingegno dello Scrittore infra l' altre della divina Opera sulle Spirali. Ma non debbe tacersi che il MS. membranaceo Fiorentino, sebbene il più antico, non andando più indietro del secolo XIII., ed il Greco dialetto dorico, nel quale scrisse Archimede, non essendovi ben conservato, ed avendo dovuto Torelli suo ultimo interpetre tramezzare ai due Libri quello del *tetragonismo della Parabola* onde meglio ordinarli, e d' altra parte sapendosi che dopo l' *Arenario* sieguono i due Libri sospetti *de insidentibus humido*, e i *Lemmi* non mai rinvenuti nell' originale idioma e solo tradotti dall'Arabo, e finalmente raccontandoci Pappo, fiorito in Alessandria d' Egitto intorno a VI. secoli dopo Archimede medesimo, che l' intitolazione della di lui Meccanica fosse anzi *de Libra*, ognun vede come ora sarebbe tempo perduto fermarsi fondatamente a discorrere sopra un Testo meno sincero, perchè incerto e se non altro alterato, corrotto o rifuso, ed in ciò non diverso da quello *de Sphaera & Cylindro*, pieno d'atticismi che additano lavoro esotico posteriore.

4. Per dare un saggio brevissimo della copia grande di conseguenze, che agevolmente derivano dall'*identità* dei rapporti di tutte le parti della Bilancia, prescelgo alcuni pochi problemi relativi a diversi accidenti dell' equilibrio intuitivo. E primieramente non richiedeva lo sforzo dell' applicazione del calcolo differenziale quel Problema facilissimo sciolto dall' Hòpital (ed anco per via di principio ausiliario) in proposito della situazione, ove fermerebbesi un peso pendente da una corda attaccata ad un punto fisso, ed avvolta a una troclea o puleggia, obbligata parimente da un filo a rimaner sospesa e girar libera attorno dell' estremo immobile di questo filo come suo centro. Imperocchè a motivo dell' evidente tension eguale della corda, da cui pende il peso in tutti i suoi punti, accade quì che la troclea venendo abbracciata da due forze eguali di direzioni convergenti, noi siamo nel proposito della troclea di Varignon o della Bilancia semplice inflessa (Corol. III.), e perciò debbasi aver l'equilibrio quando il filo, che sostiene la troclea, e stabilisce nel di lei centro il punto d' appoggio, faccia angoli pari colle due porzioni della corda stirata dal peso medesimo; e determinar questo stato per un cammino anco molto più semplice del praticato da Varignon (non avendo ora luogo il dubbio promosso da Dalembert, giacchè bisezione dell'angolo e perpendicolarità della *risultante* alla periferia della troclea vanno in questa ipotesi insieme) è Problema purissimo di Geometria. Mentre s'adoperi il calcolo dov' è inutile farne pompa, si contamina molto il suo pregio; come avverrebbe di chi, per esempio, col fine d'insinuare nell'animo degli studiosi il poter supremo dell' Algebra, loro dicesse — „ Tro-

,, vate , se pur vi riesca , colla sola ordinaria Aritmetica un
,, Numero tale, che il suo prodotto per 4, il suo quoziente
,, per 5 , ed il suo moltiplicatore suddetto facciano insieme
$12\frac{1}{2}$. ,, — Posto che a questa disfida l' Abbachista di subito replicasse — ,, Io risolvo il quesito a memoria così :
,, suppongo 1 il Numero domandato ; e dico 1 , senza l' aggiunta del 4, darebbe $\frac{21}{5}$; e perciò $\frac{21}{5} : 1 :: 3\frac{1}{2}$ (ossia
,, $12\frac{1}{2}$ meno 4) : $2\frac{1}{42}$,, — (ove non si fa uso che della *regola del tre* e della *falsa-posizione* semplice), non resterebb' egli umiliato da simile improvvisata per la pessima scelta dell' *Esempio* il vantatore poco avveduto della superiorità dell' Analisi letterale ? Ed è appunto per sì fatta cagione che i savj hanno scritto non doversi giammai la verità stessa magnificare più del giusto valore, come quella che allora deturpata da una vernice straniera perderebbe assai di suo lustro nativo e vaghezza .

In secondo luogo quel rinomato Problema , nella cui soluzione errò Galileo e quindi Renau, siccome d' accordo avvertirono Viviani, Gio. Bernoulli , Perelli , ed ha per mira di determinare la situazione dell' equilibrio di tre pesi , uno situato nel mezzo d' un filo che passi su due puleggie di livello, e gli altri due eguali infra loro pendenti dalle porzioni libere del filo medesimo dopo accavalciate le troclee , immantinente palesa colla guida del solo principio d' *identità* che la direzione verticale o centripeta del peso intermedio dee dividere per metà l' angolo formato dalle due parti eguali ed egualmente tese del filo che lo sostiene , sull' esempio della Bilancia inflessa (Corol. III.) testè mentovata . E quando tutti e tre i pesi fossero eguali , sarebbe il caso della Bilancia trifida (Corol. IV.) , e l' equilibrio avrebbe luogo scendendo il peso intermedio di tanto , quanto importasse a far l' anl' angolo dei due tiranti d' un terzo di quattro retti; alla determinazione del qual punto s' arriva mediante una facilissima costruzione geometrica. Riconobbe questo istesso principio d' *identità* Dalembert ove ragiona dell' equilibrio d' un corpo infinitesimo o finito infilato in una corda slentata o faciente *sacca;* nè potè a meno d' adoperarlo applicandolo ancora al moto de'corpi solidi in genere Euler ne' suoi celebri *Opuscoli,* il quale dopo i primi passi poco avanti fatti da Koënig e Clairaut con tutto il successo, concorse seco lui ad unir la Dinamica in lega strettissima colla Statica, perchè quest' ultima scienza era l'unica da trattarsi colla Sintesi lineare, e perciò sola coltivata (come a proposito osservano lo Storico dell' Accademia delle Scienze di Parigi, parlando del metodo indiretto di Courtivron per cercare la combinazione dell' equilibrio e di recente Fourier) dai Geometri antichi. Nasce dal principio medesimo, con iscemar di metà il peso intermedio, la semplicissima riduzione del caso di quei tre pesi al sistema di soli due discorrenti per delle linee *a piombo* ossiano perpendicolari all' orizzontale; se non che (come altrove dimostrerò) la maniera ingegnosa, colla quale Perelli, in ciò non lodato, per quanto io lo giudichi lodevolissimo, da nessuno de' suoi tre Elogisti, fece dipendere lo stato dell' equilibrio dall' Iperbola equilatera d' Apollonio, stando anco alla *massima* discesa del Centro di gravità, e vale a dire traligiiando dall' evidenza (avvengachè Lagrange abbia moltissimo semplificato questo principio indiretto, ristringendo la prova dell'altro delle velocità *virtuali* in ultima analisi alla *evidente* secondo lui discesa *massima* d' un peso solo per determinare la posizione dell' equilibrio) potrebbe rendersi assai più corta e men lavorata (Scolio del Teorema dell' Art. I.) con impiegare il metodo di Torricelli. Ma tornando ai tre pesi, dalla considerazione de' quali combinata colle oscure e deboli traccie di Fracastorio e colle lucidissime di Stevino (comunque mancanti esse siano di rigorosa prova geometrica) per rapporto a tre o più forze a piacimento diseguali, che per mezzo di corde si compongano in equilibrio, i Matematici giunser dipoi a fissar la teoria della Catenaria, Lintearia, Velaria, Elastica, ed altre Curve affini, non meno che delle Corde-vibranti, è falso quel che assicurano presso che tutti e con erma l'Istoriografo delle Matematiche, cioè essersi quì parimente ingannato Galileo assumendo la Catenaria coincidente colla Parabola conica, sebben essa dipenda per costruirsi dalla rettificazione di questa Curva. Fa molta specie che gli Italiani principalmente e Viviani medesimo prediletto discepolo di quel Filosofo linceo (al quale, copiando forse un passo inedito di Toricelli, piuttosto si debbe l'errore e la falsa dimostrazione appoggiata ad un paralogismo vistoso sopra i *momenti* de' corpi pendenti da una Leva posante su due punti d'appoggio, ed alle medie armoniche proporzionali dagli antichi di già conosciute, ma prese in sinistro quanto alle loro costruzioni eleganti da Pappo) non ben capissero il chiarissimo senso del testo de' *Dialoghi* di Galileo, e dal fondo del settentrione dovesse più d'un secolo dopo intenderne Krafft il letterale significato Toscano, e render giustizia all'Autore nei *Commentarj* dell' Accademia di Pietroburgo. Vide ben Galileo, a torto accusato da Jungius e mal servito da Pardies e Lana, e lo conobbe per via di replicate esperienze conducenti a facilitare la pratica della Balistica, (lo che non fece Girardo impegnatosi nel pretendere d'avere coi principj della Spartostatica incontrata la prova della Catenaria perfettamente parabolica) vide, io ripeto, un avvicinamento della Catenuzza tesa a conformarsi in Parabola, siccome l' Analisi stessa lo persuade. Imperciocchè l' equazione sua generale essendo $\frac{dx}{dy} = \int S\,ds$, posta S *funzione* dell' arco, e nell' ipotesi della Catena uniforme avendosi $\frac{dx}{dy} = \frac{s}{a}$, e di più *quasi*

$s =$

$s = \frac{by}{a}$ nella tensione molto avanzata della medesima, s'arriva all' equazione finale $\frac{2a^2}{b} x = y^2$, che spetta appunto alla Parabola Apolloniana; come altresì si deriverebbe dall' altra $dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{(a-y)^2 - b^2}}$ facendovi y^2 *incomparabile* rispetto ad y, e convertendola in $a'y = b'x - x^2$, *Luogo* geometrico che rimanda alla medesima conica Curva, mentre si contin le x sulla linea retta che le serve di corda. Quanto adunque dal Dialogo *sopra i due massimi Sistemi del Mondo* chiaro apparisce che Galileo non prendesse abbaglio sull' isocronismo de' pendoli oscillanti per archi diversi del medesimo Cerchio, altrettanto nulla avventurò che di vero ragionando di quella Curva ch' ei primo fu a ricercare, e ch' essendo la centina d' una Volta, per eccellenza è salita poi gigantesca a far vaga mostra di se (comunque ne scriva Frisi in contrario), forse senz' accorgimento di Michelangiolo, nella gran Cupola Vaticana, che non ha nè lo sgarbo in cima nè tampoco la debolezza nei fianchi degli archi Gotici o Tedeschi, ed alla pari delle Volte Moresche molto più svelta s' inalza di quèlla del Panteon o del secolo delle belle arti di Roma a tempo d' Augusto. Nel medesimo equivoco di cogliere in error Galileo sono anco incorsi i Geometri, i quali han preteso trovarlo in fallo sulla figura del Solido *d' egual resitenza*, o hanno l' un dietro l' altro creduto che dov' egli nei *Dialoghi* precitati non facendo che paragonare letteralmente il tempo, per cui scorre un grave lungo d' un arco di Circolo, lo annunzia di durata *brevissima*, ma unicamente a confronto della sottesa o di quante mai si voglian sottese condotte fra i due estremi dell'arco medesimo, e vale l' istesso come un' *Oligocrona* o *Brachisto-crona* relativa: perocchè l' assoluta, per quanto nuova e difficile rassembrasse, mi pare sciolta avanti ch' ella fosse proposta, subito che

Leibnitz ebbe l' idea di conciliare ed emendare Descartes sulla spiegazion della causa della legge di Snellio, pubblicata dal Vossio e rivendicata da Spleissio all' Olanda dopo confermata da Fermat, in proposito della strada che tengono i raggi della luce refratta; al qual effetto, per dedurre il tempo *minimo* del viaggio della luce medesima e decifrare il fenomeno maraviglioso delle velocità proporzionali alle resistenze, pare dalla precisa e puntuale espressione tecnica del suo discorso che adoperasse (senza citarla) la dottrina classica del Castelli, discepolo intimo di Galileo (ed è l' istessa in sostanza dell' ultimamente prodotta da Lorgna), cioè che nello stato permanente de' Fiumi crescono tanto le loro *medie* velocità, quanto s' aumentano le resistenze all' espansione o diffusione dell' acqua, o quanto scemano le *sezioni*. Del resto intorno la perspicacia somma, rigor geometrico nel dimostrare tutte le volte ch' ei se n' assunse l' incarico, ed avvedutezza non ordinaria nell' asserire di Galileo quando alcuno ne dubitasse, io son solito di contrapporgli l' elegante speculazione, che pochissimi hanno notata ne' di lui *Dialoghi* mentovati sopra le *due nuove Scienze*, cioè del *Moto locale* e della *Resistenza de' solidi* (non Moto locale e Balistica come hanno scritto taluni Biografi), concernente la Serie-infinita dei Numeri *triangolari*, dalla quale ripetuta con un sol passo anticipato, così,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ec.
    1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ec.

nascono i quadrati di tutti i Numeri *naturali*, siccome sommando l'altra Serie dei *dispari* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ec. ad indici eguali: proprietà aritmetica singolarissima, che noi sappiamo ricavar facilmente dalle formule note $\frac{n^2+n}{2} + \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2} = n^2 = (1+2n-1)\frac{n}{2}$ $= S(2n-1)$, ma che a rilevarla in quella età non si aveva altro esempio fuor della serie-infinita quadrupla decrescente sommata da Archimede nella sua seconda maniera *immeccanica* d'assegnare la dimensione dell'area della Parabola. Raccogliendo difatti tutta la letterale esposizione del modo, con cui quel Linceo definisce le due divisate Serie de' Numeri *triangolari* t e *quadrati* q, appesi equidistanti sotto figura di lamine rettangolari a una Leva, si scorge subito come essendo $t^{(n)} = t^{(n-1)} + n$, e $q^{(n)} = q^{(n-1)} + 1 + (n-1)2$, ne risulta $t^{(n)} + t^{(n-1)} = t^{(n-1)} + n + t^{(n-2)} + n - 1 = t^{(n-1)} + t^{(n-2)} + n + n - 1 = t^{(n-1)} + t^{(n-2)} + 1 + (n-1)2$, cioè fatto $r^{(n)} = t^{(n)} + t^{(n-1)}$, ne nasce $r^{(n)} = r^{(n-1)} + 1 + (n-1)2$ coincidente con $q^{(n)} = q^{(n-1)} + 1 + (n-1)2$, concesso che sia eguale il termine primo, siccome lo è, d'entrambe le Serie.

Finalmente si fa manifesto che piacendo di considerare inversa la proposizione compresa nell' Assioma, viene ad esser chiaro egualmente in virtù della solita evidente *identità* di rapporto (Fig. 1.) come una forza sola, la quale agisse per la direzione dell' asse d' una Piramide regolare e si comunicasse, o premendo o stirando, ai *venti* tutti o tiranti immateriali di quella carcassa di padiglione, o appoggiata o sorretta immobilmente in ciascun vertice angolare della sua base, ciascuno di questi appoggi o sostegni sopportar deggia egual pressione o tensione, in qualunque numero essi si fossero. L' istesso avverrebbe delle Bilancie *asteroidi* (Corol. 1. Fig. 2.) o scempie o composte, quando l' unica forza, o premente o stirante, si dirigesse pel centro e perpendicolarmente al piano di loro, e gli appoggi o sostegni parimente incapaci di cedere fossero collocati agli estremi di tutti i raggi. E sì fatto scompartimento o diffusione laterale o raggiante di forza, che nell' uno e nell' altro caso vien sempre a distribuirsi con eguaglianza sopra tutti gli appoggi o sostegni, ed apre il campo di quella spinosa teoria, ad illuminare la quale entrarono i primi Euler e Dalembert, ed oggi e soggetto di controversia dotta tra alcuni dei viventi Analisti (intorno di cui tornerò a far parola nell' Articolo I. Corol. VI. dopo il Teorema), quanto di sua natura porta seco la luce dell' evidenza intuitiva, d' altrettanto lascia molto a desiderare e tien l' animo non poco sospeso nè pago appieno di se, quella diffusione eguale di forza su tutti gli innumerevoli punti d' una Leva diritta, che Hamilton prende in conto di Postulato o Assioma per l' equilibrio, ed ha meritato l' encomio dei Collettori degli *Opuscoli* di Milano, volendo l' Autore com' evidente che la forza così sparpagliata e diffusa s' equilibri colla medesima riconcentrata, raccolta, e situata con direzione opposta nel mezzo della medesima Leva. Questo in sostanza è l' istesso che dire ,, Una forza egualmente diffusa o spartita su tutti i punti d' una retta si ,, unisce *nel centro di gravità*, e senza perder nulla del suo ,, valore malgrado le varie distanze da quel *centro*, per l'intervenzione delle quali dee giungere e propagarsi fino al ,, *centro* medesimo, vi si accumula senza scapito, nè mai ,, più nè mai meno, o piccole o grandi che siano le innumerevoli braccia delle riunite Bilancie “. Ora sì fatta Proposizione in cambio d' essere Assioma nella sua generalità considerata dall' Autore Irlandese, non apparisce nemmeno chiara e convincente trattandosi del solo particolare semplicissimo di due forze eguali poste agli estremi d' una Bilancia bifida (Corol. II.), ed agenti in direzione normale alla verga della medesima: poichè ancora quì ha bisogno di prova (Corol. VI. del Lemma seguente) ed è diffatti Teorema l' equipollenza d' una forza doppia contraria a ciascheduna delle altre due, situata in mezzo della verga suddetta. Interviene su questo proposito nominatamente l' istesso come sul preteso Assioma delle paralelle negli *Elementi* d' Euclide, che Gemino contemporaneo di Silla s'accorse il primo, per testimonianza di Proclo Diadoco, aver bisogno di prova, e di cui la storia può leggersi in due *Memorie* recenti di Castillon (o Salvenini), e come Desage ha giustamente redarguito per difetto di prova in rapporto al Teorema generale su gli angoli-solidi il medesimo Greco Geometra. Appunto in ciò pecca, come ognun sa, la dimostrazione data da Archimede dell' equilibrio nella Leva, che intese Hamilton di rettificare e correggere, nè seppe così corretta adattar tampoco alla Vite, ricorrendo ancor egli per ispiegar l' equilibrio nella medesima ai *momenti* che nascono dalle velocità *virtuali*. Ed ha in ventre l' istesso difetto eziandio la prova analitica somministrata da Foncenex della proprietà fondamentale del Vette, siccome Dalembert infra gli altri è d' avviso. In ultimo è degno di riflessione che la Piramide regolare mutandosi in Cono retto, o l' *asteroide* in Circolo, se il numero degli appoggi o sostegni si facesse infinito, ciascuno di loro sarebbe egualmente premuto o stirato dall'unica forza intermedia posta nell' apice o centro e sempre in direzione dell' asse. Nè potrebb' essere se non che infinitesima quella parte di sforzo sopportata da ogni appoggio o sostegno, quantunque grande si fosse la detta forza centrale. Quindi è che se prolungati i tiranti del padiglione conico o i raggi dell'*asteroide*, si desse luogo a circolari circonferenze via via maggiori, e scortati a minori, o concentriche o coi loro centri tutti infilati nell' asse, ferma stante l' istessa forza centrale, purchè finita, tutti quei lembi diseguali di perimetro principiando dal nulla sino all' infinito, soffrirebbero punto per punto infinitesimi sforzi, spartitasi per ogni unico lembo in infinito di numero infinitesime porzioni la data forza centrale; abbenchè i punti di tali periferie abbracciassero più o meno spazio e vi si potesse sofisticar sopra con quei sottili argomenti medesimi, che sotto nome di *Ruota Aristotelica* tanto piacquero a Galileo, Tacquet, Louville, Saumon, Mairan e cent'altri in proposito della circonvoluzione d' un anello circolare sopra d' un piano, e si reputarono la sorgente della nuova Geometria degli *indivisibili* del Cavalieri, la quale non da simili paradossi nè dal confronto de' *punti* Robervalliani, ma nacque piuttosto dal modo di paragonare entrambe le aree delle le *scale* de' tempi e velocità del movimento naturalmente accelerato ed equabile, che si legge nel III. *Dialogo delle due nuove Scienze*.

ARTICOLO I.

DELLA LEVA O DEL VETTE.

Lemma.

Mentre due forze pari A, B, di direzioni contrarie ma paralelle, tirino o premano le estremità d' una linea retta o *rigida* verga (Fig. 5.), a cui sebben libera in tutto il resto per rapporto alla direzione delle forze medesime e non appoggiata nè sostenuta, venga impedito qualsisia moto di rotazione, vi sarà necessariamente equilibrio.

(Per satisfare al supposto, che vuol separati i due *momenti* di traslazione e rotazione, gli ultimi de' quali diversifican molto dai *momenti* in genere considerati *virtualmente* per la ricerca universale dell' equilibrio o riposo, varie sarebbero le maniere: in grazia d' esempio il contrasto d' altre forze coesistenti, della medesima direzione, legate insieme qual parte di tutto un sistema, che unitamente alle due, di cui parlasi, contrabbilanciassero il *niso* alla rotazione; o piuttosto lo scorrere degli estremi smussati della verga paralellepipeda per due guide o canaletti, e questi e gli smussi coincidenti colla direzione delle due date forze (Fig. 9.), immaginando lo scorrimento come se fosse tra linee immateriali (cioè prive insieme di massa, d' attrito, e d' ogni attenenza alla Fisica molecolare); o rappresentandosi due rivolte immateriali della verga, nella solita direzione delle forze, *rigide* e adese alla medesima in modo da far tutto un *massello* (per così dire), onde non poter mai mercè di qualunque sforzo cambiarsi gli angoli ch' esse fan colla verga, alle estremità delle quali rivolte agiscano le summentovate due forze. Adopero adesso quest' ultimo modo nella Figura 10. come più semplice ad idearsi e più facilmente imitabile nella pratica, dove ha sempre luogo il concorso della materia: ma le considerazioni e le conseguenze sono le stesse che negli altri due modi, perchè questi ancora produrrebbero il medesimo effetto; ossia l' impedimento solo (senza nessun appoggio che diminuir possa il conato o mutare la direzione al moto progressivo del movimento di rotazione.)

Stando al principio d' *identità* (Figg. 9. 10.) il punto di mezzo C della verga, che risguarda sotto l' istesso rapporto i due estremi, vien sollecitato egualmente al moto progressivo o di traslazione dalla forza A per un verso (qualunque siasi), come dalla forza B per l' opposto diametralmente, in virtù della supposta eguaglianza e direzione medesima delle due forze ossia dei due angoli alterni eguali in A, B. Dunque il punto di mezzo C resta in quiete forzata, cioè animato da due forze eguali e direttamente contrarie, che impediscono o distruggono ogni movimento di traslazione; e non potendo tampoco la verga prender moto di rotazione, tutta la verga medesima rimane obbligatamente immobile o sivvero (Definiz. e Coroll. IV. dell' Assioma) in un perfetto riposo ed equilibrio intuitivo.

COROLLARIO I.

Essendo la verga immobile ne deriva che la forza B si propaga, senza menomare o crescere il suo valore, fino all' estremo punto dall' altra parte della verga medesima, qualunque siasi la di lei lunghezza o la distanza frapposta, come viceversa nella sua pienezza (e non più nè meno) propagasi o si comunica A all'estremo contrario. Se ciò non fosse, se questa perfetta collisione non accadesse delle due forze eguali in direzioni diametralmente o direttamente contrarie, d' una forza immediata, della seconda mediata, nè l' uno nè l' altro estremo punto della verga rimarrebbero immobili, contra l' espol'esposta dimostrazione. Dunque nel caso dell'impedito moto di rotazione, ossia nel caso del solo moto progressivo libero, tanto vale (Fig. 11.) che la forza B eguale ed in direzione diametralmente contraria ad A, che preme o tira un punto, agisca su questo punto immediata, quanto mediante l' interposizione o l' influsso meccanico di qualunque distanza. In conseguenza le misure varie delle distanze non entrano quì nè influiscono in verun conto nella determinazione dell' equilibrio, nè tampoco nella comunicazione del moto. La forza si mantien sempre l' istessa, ed agisce in egual grado o solleciti un punto immediatamente, o venga la sollecitazione comunque da vicino o da lontano per l' intervento d' una linea retta corta, media, o lunga che le serva, dirò così, di veicolo. E questa illazione dedotta dalla predetta Bilancia (analoga all' Archimedea, perchè dà l' equilibrio ancor ella, lo dà parimente senza rotazione, lo dà per l' istesso fondamento *d' identità*, lo dà pel motivo medesimo che la forza da un lato agisce come immediatamente in senso opposto contro dell' altro, e rende immobili entrambi gli estremi della retta frapposta, o corta o lunga, purchè nel mezzo divisa dal punto d' appoggio) è della massima importanza per la Ponderaria; ch' è quella particolarità della Statica relativa alla gravità terrestre (*pesanteur*) o dei pesi in qualunque sito proporzionali alle masse, ben differente dalla gravitazione o attrazione.

COROLLARIO II.

L'ipotesi particolare considerata da Dalembert (e quindi da Euler, Mozzi, Bossut, Salimbeni, Monge, ec., non meno che dall' Editore Italiano del *Trattato di Statica* del terzo dei Matematici prenominati, in qualità di risultato di forze o di corollario delle affezioni della Leva diritta dedotta dai loro principj), quella cioè (Fig. 12.) di due forze eguali, direttamente contrarie, e perpendicolarmente applicacate a una Leva, che non danno equivalente o *risultante*, s' accorda appieno col Lemma, e vuol dire che il punto di mezzo della Leva non è sollecitato, e la Leva libera, priva d' ogni moto progressivo, non farebbe che girare intorno il punto medesimo, che rimarrebbe immobile. È negativa la prova che Dalembert somministra di quel Teorema preliminare; nè lascia d' esserlo parimente, e più prolissa e più elaborata, l' altra dell' equilibrio di quattro forze normali ed eguali (Fig. 13.), due per due in sensi opposti e ad intervalli pari applicate a una Leva. Questo caso speciale sta in termini puntuali d'accordo colle condizioni del Lemma, perchè in virtù della simetrica o euritmica distribuzione delle quattro forze intorno il punto di mezzo G e del conseguente *contranniso* la Leva AB, comunque prolungata verso D, E, non è in grado di concepire tampoco alcun moto di rotazione; laonde mercè del contrasto delle quattro forze havvi luogo all' impedimento rotatorio della Bilancia, d' altronde libera, voluto dal Lemma, la qual Bilancia Alembertiana non è in somma che un raddoppiamento dell' analoga Archimedea simetricamente disposta, o sivvero uno dei tanti modi valevoli ad impedire per *contracconato* la rotazione. Ma oltrediciò, per il Lemma, il punto di mezzo F resta immobile come l' altro G; laonde immobile anco riguardo a moto progressivo o di traslazione tutta intera la Leva diritta, che dee rimaner sempre ferma stando fermi due soli punti di lei, o vicini comunque o comunque lontani.

COROLLARIO III.

Tanto è vero che Maclaurin e Dalembert avessero i primi tra i Geometri moderni l' idea di rappresentarsi una Bilancia figurata nella maniera esposta dall' enunciato del Lemma, quanto che s' accostò molto ancor Huygens a considerarla circa un secolo avanti di loro: ma il Geometra Inglese non seppe conoscervi se non se l' *identità* più vistosa per rispetto al movimento solo di rotazione, mentre gli altri due pel contrario non vi scorsero punto il fondamento medesimo d' *identità* come nell' antichissima d'Archimede . La Bilancia Hugeniana è conformata come nella Figura 14. a doppia squadra o in *zigzag*, di braccia estreme e di pesi eguali . Per l'*identità* rimane impedito il movimento di rotazione intorno AB come unico asse, o attorno di AB ed insieme attorno di G H normale al primo asse e nel medesimo piano, supponendola centrata e sorretta sopra due perni A, B, o ancora senza di questi appoggiata o sostenuta nel mezzo D. E per la medesima *identità* relativamente al punto di mezzo D ed agli estremi, tanto può il peso E contro di F, quanto viceversa F contro di E ; e perciò la Bilancia debb' essere in equilibrio come se rettilinea ella fosse o conforme al punteggiato nella Figura. Anzi la Bilancia d' Huygens mostra di più che il peso E col suo braccio, e viceversa, sollecita in senso opposto ed agisce egualmente contro di F, e vi propaga e comunica la sua forza come se fosse in dirittura nella Bilancia d' Archimede (vedasi il punteggiato); e ciò malgrado la distanza intermedia AB, comunque corta o lunga, che separa le due braccia, ed impedisce che siano in una linea retta continuata sull' esemplar dell' antica. Dalembert dipoi speculando sopra gli appoggi contestò l' evidenza dell' istessa Bilancia Hugeniana mercè il *contranniso* de' due opposti *momenti*. Era dunque facile il passo a rappresentarsela senza perni o sostegni e come *in aria* tra due opposte forze eguali, le quali agissero (Fig. 15.) su due altre rivolte fisse a squadra, ed in virtù dell' *identità* (parimente così venendo impedita la rotazione) rendessero immobile il punto intermedio D, e realizzassero ancora quì l' equilibrio, che non mai può accadere, salvo che la forza a destra agisca sulla sinistra mediatamente coll' intermezzo della Leva inflessa come se agisse immediatamente sopra di quella. Dunque anco nelle Leve in iscempio, doppio, triplo, o comunque moltiplicato *zigzag*, a squadra o sottosquadra, purchè in ordine simetrico e opposto, essendovi luogo al solo moto progressivo e restando impedito per alcuno dei modi spiegati il giratorio, la forza che prema o stiri un estremo, passerà intera all' altro estremo come se vi si propagasse per la linea più breve, qual è la retta che vedesi punteggiata; e ciò comunque sia questa o corta o lunga, comunque lunga o corta la Leva vera intermedia, comunque lunghe, corte, moltiplici, e variamente angolate ma in correspettiva eguaglianza le giunte o rivolte della medesima. Siamo sempre nel pretto caso d' applicarvi il principio d' *identità*; e col moltiplicare o rimpicciolire in parte o in tutto le giunte, si potrebbe ridur la Bilancia eziandio a braccia miste o curve, simili, eguali, ma inverse, di doppia o semplice curvatura, ferme stanti per essa tutte le superiori affezioni.

COROLLARIO IV.

Raccolgo adesso tutti gli altri punti di somiglianza dell' antica e moderna Bilancia. 1.° Riconoscono entrambe i medesimi limiti: imperocchè (Fig. 16.) tanto la prima che la seconda, incominciandosi dallo stato delle direzioni delle forze normali alla verga e viemaggiormente crescendo gli angoli ottusi (Corol. II. dell' Assioma), termina nella verga (o anche filo) stirata in senso opposto da due forze eguali a' suoi estremi, mentre sminuendo via più gli angoli acuti (l. c.) finisce colla verga *rigida* pigiata in direzione contraria nelle due estremità da due forze pari, ed è questa in un caso e nell' altro la Bilancia scempia (Corol. IV. dell' Assioma), la Bilancia della Natura, il germe in somma dell' evidenza dell' equilibrio (Num. 2.° dello Scolio) sì nella Statica come nella Dinamica. — 2.° In essi limiti il contrasto delle due forze eguali elide ogni moto per *identità* di ragione, come a pari nelle due Bilancie enunciate, ciaschedun punto della verga (o filo) dei limiti trovasi stretto o stirato da due forze eguali contrannitenti, e lo è parimente in amendue le Bilancie: queste due forze di pressione o distrazione in qualunque punto de' limiti (non che nel solo di mezzo) equivalgono alle due eguali estreme come nella Bilancia moderna (Corol. I.), e nell' antica quando disimpegnato il sistema dal punto d' appoggio (e ne vedremo il modo nel Corollario VI. seguente) le venga tolta dall' arte ogni tendenza al moto di rotazione senza niente offendere il progressivo. — 3.° Per questa propagazione o comunicazione di forze intere o assolute in tutte e quattro le Bilancie non contribuiscono in verun conto le distanze ossiano le maggiori o minori lunghezze delle verghe o dei fili, ch' è quanto dire non hanno nulla di modificato dalle medesime o relativo. — 4.° Oltre di che nelle Bilancie inflesse (non bifide) e disposte in un piano perpendicolare a quello delle considerate di sopra (Coroll. III. dell' Assioma), di braccia eguali (Fig. 17.), *rigide*, d' angolo invariabile non ostante qualunque sforzo, libere quanto a ricevere qualunque moto progressivo, o di traslazione, ma incapaci (o per *contranniso* o per altra maniera) di prestarsi al moto di rotazione, accade l' istesso appunto come nelle diritte. Abbiasi difatti in A estremo del primo braccio una forza, che stiri o prema la rivolta o giunta perpendicolare al piano delle due braccia della Bilancia piegata (e sarebbe il medesimo di qualunque altra inclinazione, purchè si conservasse il paralellismo alla direzione dell' altra forza che siegue), e la stiri o prema nella dirittura della giunta predetta; si faccia così rapporto all' altro estremo C, adattandovi forza eguale in senso opposto alla prima, onde non siavi luogo che la Bilancia angolare prenda mai movimento di rotazione. È evidente pel principio d' *identità* che il vertice dell' angolo B rimarrà tanto premuto o stirato per un verso in virtù di A, quanto per l' opposto in virtù di C; e torna a dire stretto o distratto da due forze direttamente contrarie, immobile, e in equilibrio. Manca dunque ogni moto progressivo nella Bilancia; manca quello di rotazione intorno ai punteggiati due assi

DE, FG, per l' ipotesi fatta; ed in conseguenza avviene l' istesso come nella Bilancia moderna diritta. Da un estremo C all'altro A si comunica o si propaga piena ed intera la forza pel viaggio o intermezzo flessilineo, corto o lungo, più o meno aperto, non altrimenti che pel diritto brevissimo punteggiato. Varrebbe altrettanto se non diritte fosser le braccia, ma entrambe curve, o miste, purchè simili, eguali, e similmente disposte; l' *identità* per rapporto a B dovendo procacciar sempre il resultato medesimo. Quindi è che se imitandosi la Bilancia Alembertiana sian quattro le forze simetricamente applicate, tutte eguali infra loro, le due superiori equidistanti da B, le inferiori opposte di direzione rispetto alle prime, e diversamente equidistanti da B, nè per *contranniso* o altro modo abbiavi luogo alla rotazione intorno DE (giacchè intorno FG, atteso l'*identità* viene di sua natura impedita) vi sarà necessariamente equilibrio come nella Bilancia diritta, pel motivo che in ognuno de' bracci il punto di mezzo O, O′ resta privo di moto progressivo o di traslazione (Lemma); lo che porta alla quiete forzata tutto il sistema, e ciò indipendentemente dalle maggiori o minori lunghezze o distanze. — 5.° Finalmente si fa manifesto che se ai due punti estremi delle braccia eguali della Bilancia inflessa sianvi due forze eguali, della medesima direzione, perpendicolari al respettivo braccio, e paralelle o nello stesso piano, la loro *risultante* per il principio d' *identità* debbe giacere nel piano, che passi per la retta BH bisecante l' angolo e sia normale al piano della Bilancia; essa debbe in virtù dell' istesso principio anco giacere nell' altro piano delle direzioni paralelle delle due forze come nel Corollario II. dell' Assioma, imperciocchè i due tiranti BA, BC (o quanti altri mai ve ne fossero uniti a questi, purchè nel medesimo piano) essendo ciascuno perpendicolari alla direzione delle rispettive due forze, non possono avere alcuna azione o influenza per renderla obliqua o in qualsisia modo cambiarla di piano (atteso non esservi maggior ragione per deviarla da quel piano o inclinarla a destra piuttosto che a sinistra): dunque la *risultante* dee combinare colla comune sezione di questi due piani, cioè colla linea retta perpendicolare al piano della Bilancia, che passa per il punto di mezzo della retta congiungente i due punti estremi delle braccia della medesima, paralella alla direzione delle forze, come se i due tiranti non esistessero ed in loro vece esistesse la verga AC punteggiata (ed in ciò equivalente) d' una Bilancia diritta ossia Archimedea. Quest' ultima conseguenza è rilevantissima per condurre alla teoria della Leva.

COROLLARIO V.

Dalle riflessioni superiori raccogliesi facilmente come spiegar l' equilibrio, che l' esperienza dimostra nella Bilancia famosa di Roberval, la quale ha pesi eguali pendenti da braccia assai diseguali ed anco, se pur si voglia, situati da un lato solo (Fig. 18.) e che nessuno, per quanto siami noto, contando da Desaguliers (che l' esaminò senza nome dell' Inventore e ne dimostrò l' equipondio colle stesse parole di lui, vale a dire colla dottrina solita Cartesiana delle velocità *virtuali*) è stato valevole a decifrare, non esclusi tampoco Parent e Dalembert che lo fece per mezzo di replicata decomposizione di forze, dove (riflettendo maturamente alla cosa) non eravi nessun motivo nè natural modo di decomporle. Essendo fissi i due bracci AC, BD, in A, B (nè importa che corrispondano ai punti di mezzo dei lati verticali del telajo paralellogrammo snodato nei quattro angoli, ma o sopra o sotto a piacimento o entrambi o l' uno e non l' altro, e ciascheduno a diseguali distanze, quando ciò si voglia, dagli angoli superiori o inferiori) ed inchiodativi stabilmente, e perciò non potendo prestarsi giammai ad alcun movimento di rotazione, i due pesi o *romani* eguali pendenti si facciano comunque scorrere lungo quei bracci, e si fermino in qualsisia punto dei bracci stessi, si, esterni o interni, ora l' uno, ora l' altro, ora entrambi, e a diseguali distanze da A, B; questo è il caso delle forze contemplate nel Corollario I. le quali agiscono (e se n' accorse, senza vederne bene il perchè, Roberval egli stesso) piene ed intere su i punti A, B indipendentemente dalle distanze, o come se immediatamente agissero sopra i medesimi; il che coincide coll' equilibrio della Bilancia semplice Archimedea. Non altrimenti farebbe un Grave (Fig. 19.) che obbligato e stretto senza diminuzione di peso dentro la guida d' un canal verticale levigatissimo portasse seco una *riga* qual coda al medesimo grave fissamente saldata, o in altro modo equipollente attaccata; poichè questa o corta o lunga (purchè *rigida* o incapace di flettere o di brandire) non essend' abile a concepir rotazione, comunicherebbe o propagherebbe (Corol. c.) l' impressione di tutta la forza del Grave pendente nella guida, a distanza vicinissima, mediocremente rimota, o lontanissima dal Grave predetto. Così mentre una Vite maschia (Fig. 20.) serra per mezzo della sua femmina una lastra metallica o d' altra materia considerata *rigida* e ferma, questa preme il sottoposto corpo egualmente in A, A', A", ec., a qualunque distanza dalla Vite medesima piaccia di collocarlo. Il Corollario I. lo prova; tutti gli Artefici il sanno maneggiando *morse* e *strettoj*, e lo seppero sempre per pratica; e rinnuovare l' esperimento è opera di facilissima esecuzione.

COROLLARIO VI.

Deriva dagli stessi principj il Teorema, che può con ragione chiamarsi l' unico, a cui si riporta, al dire di Dalembert, la Statica tutta non che l' intera Barologia (Scolio dell' Assioma in calce), ed è che nella Bilancia antichissima o d' Archimede il punto d' appoggio o sostegno, che rimane nel mezzo ed induce per *identità* l' equilibrio, sopporta (non diversamente dalla Bilancia della Natura, ov' è l' evidendenza intuitiva (Corol. IV. Num. 2.)) la pressione d'ambedue insieme le forze eguali, perpendicolari e paralelle, che agiscono sulle estremità delle braccia parimente eguali, ma di qualunque lunghezza, come se per *quantità* e *posizione* vi si concentrassero quelle due forze medesime ed immediatamente lo premessero o tirassero insieme. E vaglia il vero, se poste accanto ed a contatto libero sopra l' appoggio immobile C (Fig. 21.) due delle verghe eguali e comunque lunghe, a forze pari nei punti estremi a quelle normali e paralelle infra loro, egli è fuori di dubbio che in questo sistema sciolto, quando venisse per un dei modi già esposti impedito ogni moto di rotazione, l' appoggio C risentirebbe una pressione eguale alla forza A ed un'altra pressione eguale alla forza B (Coroll. V.). Ora la maniera di togliere a tal sistema di forze la rotazione per *contranniso* ed *identità* (Lemma) è quella d' unir le verghe, saldarle o farle *stereotipe* in D, congiungendosi allora i due matematici punti in un solo. Dunque ec. Mentre si voglia paragonare questa semplicissima prova con quella ultimamente datane da Fourier, bensì piena d' ingegno, non dubito che gli amici dell' ordin sintetico non inclineranno a posporla subito che ella dipende da un bilanciamento d' unione di non meno di XIV forze (tra le quali due doppie) e da una Bilancia trifida, collegata piuttosto colla composizione e risoluzione delle potenze (Articolo II.) che colla Levá diritta. Solamente mi giova avvertire che tanto per la disposizione della figura, considerata come un Rombo piano materiale nel metodo di Fourier, quanto per l' altra conformazione, in virtù di cui Darcy ha dimostrato il facil Teorema di Pemberton dei settori-solidi proporzionali a' tempi, mentre un punto nella sua orbita venga attratto verso due centri di forze, è stato sempre d' uopo ricorrere a quell' istesso principio di simetria, che a mio parere non ha nessun altro, il quale nell' evidenza, copia di conseguenze e semplicità lo pareggi nella Geometria, nell' Analisi, e nella Meccanica. Si conferma il già provato teorema dalla Figura 13. (Coroll. II.): perocchè se le due forze superiori (eguali alle inferiori e tra loro) s'immagini che via via s' avvicinino e finalmente si confondano in una nel punto medio C, vi sarà sempre equilibrio. Questa forza unica in C, che contrabbilancia le altre due rimanenti, venendo ad esser composta di due eguali cospiranti sulla medesima retta, è evidente come 1 + 1 = 2, che si fa doppia di ciascheduna dell' estreme (e sempre doppia senza dipendenza dalle distanze), e ch' equivale alla somma delle due estreme suddette. Anzi può molto più estendersi questa verità interessante per tutta la Statica. Conciossiacchè (Fig. 22.) quando avessimo due forze a piacimento diverse, come due pesi B, C attaccati fissamente a due verghe di qualunque varia lunghezza o caudati, e posti in canale nella maniera descritta dal Corollario precedente, il punto d' appoggio o sostegno A sopporterebbe altresì concentrata e riunita la gravità de' due pesi pendenti: di modo che se saldati i due bracci facessero equipondio i due pesi (sebben questi e quelli fossero diseguali (Teor. seg.)), in tal caso, anco senza le guide o scanalature venendo impedita per *contranniso* la rotazione, l' appoggio A soffrirebbe concentrata in lui solo la forza dei bilanciati due pesi. Archimede lo tacque; Roberval lo suppose nella Bilancia; Guidubaldo fu il primo a notarlo chiaramente nel Vette, e poi Varignon lo collocò infra i principj evidenti di Statica; Maclaurin lo pose come d' indubitata evidenza, nè (avvalorato dall' esempio d' Archimede, che forse altrove lo dimostrò (Scolio dell' Assioma al Num. 3.), se pure è di lui, e non d' Herone d' Alessandria, l' Opera attribuitagli *De Libra*) ebbe mai in animo di darne prova: il caso inverso serve di regola per gli appoggi. Ecco il Teorema, dalla dimostrazione del quale, stata da tutti i Scrittori della Meccanica (non eccettuando Fermat e Maclaurin citato, tanto appassionati quant' essi furono per mantenere il rigore inconcusso della Sintesi degli antichi) o mal ideata o soltanto supposta come di verità d' esperienza o neglctta, e recataci il primo (dopo alcuni tentativi fattine da Darcy) alla sua maniera da Dalembert (ved. nel Corol. II.), nasce direttamente la scienza del *Centro di gravità* o del *Centro d' inerzia* che vacillerebbe altrimenti come priva affatto di fondamento teorico. Senza di questa prova (che Monge in ultimo luogo, come avean fatto Varignon e Bossut, ha espiscata dall' Infinito, ma supponendo combacianti o coincidenti le paralelle) non mai si saprebbe, che nel Centro di grandezza o di materia pesante d' un corpo omogeneo regolare o simetrico si accumula e si ristringe per equipollente la gravità proporzionale alla massa di tutte le parti che lo compongono. Non si saprebbe tampoco che addivenisse l' istesso anco di tutti i corpi irregolari o sistemi qualunque di punti supposti gravi, se prima non si fosse dedotto il Corollario presente, come quello da cui dipende tutta la teoria de' *momenti*. Un corpo regolare od irregolare altro non è che un complesso di bilancie semplici d' Archimede o di leve, i cui punti d' appoggio sono tutti infilati nell' asse, sul quale vengon così ad essere coacervate tutte le forze sostenute dagli appoggi medesimi, o quelle sivvero di tutti i punti pesanti. Ciò non è solamente verità d' esperienza, ma di rigorosa teoria; dalla quale necessità e non contingibilità del fenomeno fisico prende origine appunto l' esatta corrispondenza del ritrovamento fatto della *quadratura* della Parabola, sì da Archimede come da Guidubaldo, Luca Valerio, Galileo, Torricelli, Schooten e molti altri in diverse ingegnose maniere mediante i *centri di gravità*, colle dimostrazioni che parimente la stabiliscono, attinte dai principj astratti della infallibile Geometria. Di quì si ricava eziandio l' origine vera del *Centro di percussione*, non men che dell' altro che si nomina *Centro spontaneo di rotazione* considerato avanti di tutti da Giovanni Bernoulli seniore, dipendenti ambidue dai *momenti* d' inerzia o *angolari* velocità; e si conosce di più perchè questi non abbiano negli impulsi eccentrici luogo, tutte le volte che il moto rotatorio sia dalle circostanze impedito. Per esempio (Fig. 23.) guidata nella caduta naturale tra due canali verticali, a stretta ma senza soffregamento, una lamina o regolo *rigido* di qualsisia lunghezza, gravato in mezzo da un peso, con qualunque punto A, B, C, ec. ei perquota nella discesa, perquoterà sempre colla pienezza ed integrità del proprio *momento*, e la sua percossa eccentrica varrà precisamente, e non meno, quanto la percossa centrale. Congegnata parimente una bilancia o verga comunque lunga e fornita di due pesi eguali agli estremi (Fig. 24.), non altramente il punto d'appoggio, o sia nel mezzo A, o pongasi a destra in B, o a sinistra in C a piacimento, soffrirà sempre l' istessa pressione equivalente alla somma dei due pesi o al doppio d' un solo: imperciocchè non potendo la verga prestarsi a niun moto di rotazione e libera essendo nel rimanente, torniamo al caso delle Figure 19. (Corol. V.) e 22., cioè del Grave D caudato e dell' altro E similmente caudato, le code dei quali o più corte o più lunghe che siano, pigiano sempre con pari forza gli appoggi, B, A, C, ec., ed urtano perciò sempre in qualunque punto colla forza medesima di percossa, che in questo particolare equivale al prodotto del doppio della massa d' un Peso per la velocità concepita nella caduta. Intanto adunque negli urti v' ha luogo al *Centro di percussione*, ov' è massimo (e combina col *centro d'oscillazione* nell' ipotesi della gravità terrestre), perchè il moto, che sarebbe tutto progressivo e diffuso egualmente su tutti i punti d' un Corpo *rigido*, in virtù del punto fisso o centro obbligato e della coerenza d' aggregazione delle molecole componenti il medesimo non può a meno di cambiarsi in rotatorio, e si modifica e si spartisce disegualmente a proporzione delle distanze dal centro, come fa la tendenza eguale di Gravità degli atomi integranti rispetto al *Centro d' oscillazione*. Cada una verga omogenea, paralellepipeda, pesante, *rigida*, e libera affatto onde poter prestarsi ai due moti di traslazione e di rotazione, diversissimi sempre e indipendenti fra loro:

se urta nel mezzo, tutto è ben bilanciato all' intorno; pel *contranniso* non havvi luogo alla rotazione; l' impulso è pieno ed intero: se poi urta fuori del mezzo (non essendo mai tutta l' impressione dell' urto istantanea, poichè in Natura non esistono corpi perfettamente duri), la reazione fa sì che nell' istante primo dell' urto la parte più lunga (siccome vedremo, e Pappo istesso lo vide (Corol. I. del Teorema dell' Art. II.)) sbilanci o preponderi; gira allora tutta la verga pel principio d' *identità* intorno il punto di mezzo; sgrava l' urto più o meno a proporzione dell' eccentricità del medesimo; lo snerva, l' indebolisce colla rotazion concepita in senso diametralmente contrario; e qualche volta lo annienta se si combini l' eguaglianza del movimento di traslazione, che aveva comune a tutti i suoi punti la verga, al giratorio che nasce. Ecco come dagli impulsi eccentrici prende nascita il *Centro spontaneo di rotazione*, tostochè alla tendenza al moto progressivo o all' attualità del medesimo (che si mantiene l' istesso come se fosse centrale l' impulso, giacchè il rotatorio facendosi intorno al centro, nulla aggiunge nè toglie (per l' *identità*) al progressivo sempre eguale (Corol. V.) comunicatogli da una forza comunque vicina o lontana), evvi aggiunta e promiscuata l' altra del giratorio. Il giratorio unito al progressivo lo accresce in alcuni punti, lo menoma in altri, e riduce ogni moto momentaneo del Corpo urtante od urtato a guisa di quello del Pendolo, o sivvero girante difatto o come se girasse, a motivo dei due movimenti coacervati, intorno d' un centro o punto fisso ed in quiete, posto ora dentro ora fuori del Corpo (e parlandosi di *spontaneo*, sempre eccentrico per rapporto a quel della massa) secondo le differenti combinazioni de' due moti suddivisati. Quello che ho detto sin quì d' una verga, per applicarsi ad un Corpo di figura qualunque o ad un Sistema a piacimento dato di punti, sì nella Dinamica celeste, come scrive Laplace, sì nella terrestre, non ha di mestieri che del sussidio del Calcolo; non altrimenti che l' Alfabeto, se-

secondo i Greci, serviva solo d' ajuto e non di base al Discorso (αλεξιλογα Γραμματα): tanto è vero, che tutto il nostro sapere nelle Scienze-esatte altro non sia che rappresentare, generalizzandoli, col soccorso d' un linguaggio più o men filosofico, più o meno significante e abbondevole, dei principj semplici e di facile concepimento.

COROLLARIO VII.

Siegue dal Corollario passato che se per inverso la verga o traversa d' una Bilancia abbia in vece dell' appoggio nel mezzo una forza premente o tirante in direzione normale alla medesima verga, e questa si adatti (Fig. 25.) colle sue estremità sopra due punti immobili, oltre a sapersi che ciaschedun degli appoggi è ugualmente premuto o stirato in virtù dell' *identità* (Scolio dell' Assioma), si sa di più ch' esso sopporta precisamente altrettanta pressione o tensione, quanta equivale (nella direzione medesima) alla metà della forza suddetta, e sempre l' istessa, senza relazione alla distanza ossia alla lunghezza d' entrambe le braccia. Imperciocchè tanto soffre di forza ognuno di quelli appoggi, quanta ve ne vorrebbe per isgravarli affatto d' ogni pressione o tensione: e questo appunto avverrebbe quando i punti estremi della verga venissero stirati o premuti, in direzione contraria a quella della forza di mezzo, con forza pari alla sua metà, che disimpegnando dagli appoggi la verga (Corol. c.), e lasciandola immobile tuttavia, ma come bilanciata *in aria* ed interamente libera, vi procaccierebbero l' equilibrio. — Era nota ai Chinesi, anco nell' infanzia delle Arti in Oriente, che così fattamente si distribuissero i pesi dal mezzo agli estremi d' una Bilancia, e che per nulla vi contribuissero le distanze. Racconta difatti l' *Atlante Sinico* del Martini come quei popoli, e massime i Pekinesi abitatori di vasta pianura, sono soliti trasportare pesantissime moli per mezzo d' una macchina o d' un castello composto di più Bilancie o Gioghi o Forche che debbano dirsi (Fig. 26.), stabilmente intelajate a squadra nei loro centri o punti intermedj, stando il Peso in O punto medio di questa *euritmica* Bilancia composta, ed i *Facchini* sottoponendo gli omeri loro agli ultimi gioghi. Accade di quì, che in A sosterrebbesi $\frac{1}{2}$ del Peso, in B $\frac{1}{4}$, in C $\frac{1}{8}$, in D $\frac{1}{16}$, in E $\frac{1}{32}$, ec., andando avanti così in progressione dupla decrescente con tanti termini, quanto è il numero delle forche o diramazioni, contata ancora la bilancia ov' è il Peso, e di tal denominatore nell' ultimo qual è il numero dei gestatori. Si verifica in ciò uno dei non rari casi d' un Grave, che preme in egual grado tutti gli appoggi simetricamente disposti intorno il punto centrale, ma non tutti dal medesimo equidistanti, e gli preme per una parte di se *submultipla*, *denominata* dal numero degli appoggi medesimi, che può crescere a piacimento inoltrando la progressione suddetta. Nè lascia di far maraviglia che per naturale presentimento uomini rozzi, i quali si son tenuti sempre lontani dalla civilizzazione Europea, fino *ab immemorabili* non attendessero a conservare la lunghezza medesima in tutti quei gioghi, e che anzi come indifferente per conseguire la distribuzione eguale del Peso su i portatori, li menomassero in vista d' economizzare lo spazio, e li rendessero a un tempo più gracili onde risparmiare quant' era possibile la materia (che quì non si conta in linea di peso) secondochè s' aumentavan di numero le successive diramazioni. Eppure l' età di tal pratica è anteriore all' Istoria, e supera di molti secoli anco quei tempi dell' iniziamento della cultura degli Ateniesi, quando *μύριοι* significava 10000, *μύριος* infinito, e l' Ω allora conformato come ∞, era il *non plus ultra* della numerazione, d' onde questa Nota o Sigla passò ad indicare il Mille o il cıɔ, così figurato in antico ↀ, e poi M nella Romana Paleografia lapidaria ed in quella del

Medio-Evo. — Sul medesimo fondamento è portata la ragione, per cui nelle troclee o puleggie-semplici mobili, non meno che nelle composte, dette Polispasti dai Meccanici Greci e Taglie infra noi (*Moufles*), un Peso pendente dal centro delle prime carichi della sua metà ciascheduna delle corde, che le sostengono, avvolte alla loro circonferenza (ed Aristotele stesso non tralasciò d' accennarlo mentre pur siano sue le *Questioni Meccaniche*), o di tal parte *aliquota* nelle seconde *denominata* dal numero delle corde qual ch'egli sia, purchè le corde tutte predette sian verticali o paralelle tra loro, e le troclee comunque diverse di grandezza o di raggio, siano concentriche o girino intorno all' asse medesimo o siano in modo equivalente disposte. La combinazione speciale, di cui si parla, nient' altro ha di nuovo che d' essere una replica di Bilancia semplice coi replicati appoggi *euritmicamente* distribuiti, come se n' accorse prima di tutti il prefato Guidubaldo di Monte-Baroccio (discuopritore eziandio della proprietà ammirabile della Coclea-idraulica, in cui l' acqua *sale scendendo*, avvisata senza citarlo da Bernoulli e da altri); abbenchè il pensiero felice, che tutte le Macchine fossero veramente Bilancie (Ζυγός) o Vetti (Μοχλός), provenga in ultima analisi, malgrado la confutazione di Varignon, da Aristotele summentovato. Ed altre disposizioni di puleggie e d' appoggi non sono in sostanza che la Macchina Chinese compendiata e ristretta, colla medesima progression dupla decrescente che vi campeggia. Ma tanto Galileo, che gustò ed illustrò questa idea, quanto Lorenzini e Grandi che videro (Figg. 27. 28.) gli appoggi A, B d' una colonna o tonda o prismatica esser gravati della metà del suo peso (il primo col metodo sagacissimo di quattro fili o sostegni, due de' quali raggruppati nel mezzo F, quasi anticipando (Corol. II. Fig. 13.) il suggerimento di Dalembert, e l' altro, che quindi ancora abbozzò la Macchina de' Chinesi, mediante l' immaginaria riduzione della forza del Peso, pari a quella con cui l' Analista prelodato Francese e Parent (Corol. V.) intendevano già di spiegare la Bilancia di Roberval) fecero la supposizione gratuita, egualmente che Lahire, Varignon e tutti gli Autori di *Meccaniche nuove*, e dopo di loro Maclaurin, Euler, Foncenex, Hamilton, Lagrange, ec., (Scolio dell' Assioma Num. 4., Corol. VI. del Lemma) che le corde d' una troclea mobile o d' una *taglia* siano ciascuna egualmente tese (ed il principio dell' *identità* lo convince), e che la tensione d'ognuna di esse equivalga a tal parte del Peso attacato al centro, determinata dall' unità divisa pel numero delle corde sostentatrici: e questo aveva bisogno di prova. Nè mai la diedero alcuni se non se ritornando, come Carnot, al generale principio solito Aristotelico del paragone delle velocità della potenza e del peso nelle Macchine in moto; ch' è uno stato ben differente da quello dell' equilibrio, giusta le osservazioni del Numero 2. dello Scolio citato. Tanto maggiormente ciò meritava rigorosissima prova, in quanto che con ragguardevole perspicacia il divisato Lagrange, perfezionando il lavoro tentato da Euler e seguitando le feconde idee di Carnot, avanzò tutti gli altri nel sopredificare recentemente a questo solo supposto (*il est visible*) l' intera dottrina dell' equilibrio derivata dalle formule note dei *momenti* (ossia dalle forze moltiplicate per le *velocità virtuali*) conducenti a un *massimo* o un *minimo*.

COROLLARIO VIII.

Accade più in grande l' istesso nelle Bilancie *asteroidi*, verificandosi in loro (Fig. 29.) che il punto d' appoggio o sostegno posto nel centro delle medesime soffre il carico di tutte insieme le forze eguali, paralelle e perpendicolari prementi o stiranti, situate agli estremi de' raggi, più o meno lunghi che siano, e lo soffre nella direzione suddetta delle forze parziali. Equilibrata com' è per evidenza intuitiva ogni Bilancia *asteroide*, qualunque numero ell' abbia di raggi (Corol. I. dell' Assioma), e non potendo pel *contrapposto* d' *iden-*

d' *identità* prestarsi a moto di rotazione per nessun verso, ragion vuole che la forza B situata all' estremo d' un raggio si propaghi o comunichi intera ad A indipendentemente dalla distanza (Corollarj V. e VI.): e lo stesso discorso adattandosi ad ognuno degli altri raggi, il centro A risente dunque altrettanto di pressione o tensione, quanto $B + B' + B'' + B''' + B^{iv} + B^{v} + B^{vi} +$ ec., paralellamente alla direzione comune a tutte le forze parziali. Ora si manifesta altresì, che posta una forza normale al piano dell' *asteroide* nel centro, questa non solamente si diffonde con egualianza ed in direzione paralella a se stessa su tutti gli estremi de' raggi comunque lunghi, convertitisi in altrettanti punti d' appoggio o sostegni (Scolio dell' Assioma *in fine*), ma oltrediciò che ciaschedun degli appoggi sopporta tal parte di quella unica forza centrale, che sia equipollente al di lei *submultiplo* o *aliquoto denominato* dal numero dei raggi della data Bilancia *asteroide*. Così il Teorema diretto e l' inverso colla concentrazione e suddivision delle forze si prestano luce scambievole, e si confermano mirabilmente a vicenda. Così (l. c.) viene a spartirsi egualmente e si fa infinitesima, cioè $\frac{F}{\infty}$, sull' orlo o lembo andante d' un Circolo come appoggio continuo la forza F intera del centro, e nulla nello spartimento si perde del valor della forza centrale. Così finalmente si ha la certezza, che l' orlo o periferia d' un Bilancier circolare aggravato nel suo centro d' un peso, sia quella o piccola o grande, sia pari alla pupilla, lo sia all' orbe di Sirio, sia un punto, sia l' infinito (*neque novit Natura limitem*), appoggiata immobilmente che fosse, soffrirebbe *in massa* sempre la stessa pressione ed egualmente diffusa e distribuita su tutti i di lei innumerevoli punti (Scolio dell' Ass. l. c.); lasciando ai Grandiani e Fontenelliani libera e piena la facoltà di spaziare coi voli della lor fantásia tra le relazioni numeriche della divisibilità illimitabile delle linee e i varj ordini d' infinitesimi e d' infiniti, onde coglierne quei paradossi, che più si confacciano ad ingigantir colle meraviglie anco il santuario purissimo dell' evidenza. A me piace piuttosto di far riflettere (Fig. 30.) che cambiata la Bilancia *asteroide* di regolare com' era in irregolare, sì per rapporto alla differente lunghezza de' suoi raggi, sì rispetto ai suoi angoli centrali, sì ancora avuto riguardo ad entrambe le qualità prese insieme, se le forze agli estremi de' raggi si mantenessero come sopra, eguali, paralelle e normali, ma ciascheduna stabilmente caudata od incanalata (Lemma e suoi Corollarj V. e VI.), o supposto un lembo pesante, comunque storto, smerlato e difforme, ma tenuto *in guida*, il centro o punto d' appoggio sarebbe sempre premuto non diversamente dalla prima supposizione della regolarità di figura; e ciò perchè in virtù dei principj premessi ogni forza, senza dipendere dalla distanza e dall' angolo, si comunica intera mediante il suo braccio particolare all' appoggio o sostegno A, in cui viene così ad accumularsi la somma di tutte nella medesima direzione. E qualora le forze parziali (stando fermo il rimanente) si supponessero diseguali comunque infra loro, con tutto questo la somma del carico intero, nè più nè meno, poserebbe sul punto d' appoggio. Quando poi libere affatto e sciolte nella loro azione le forze, malgrado la respettiva diseguaglianza e quella dei raggi e degli angoli, non meno che del lembo, si contrabbilanciassero naturalmente per *contranniso*, a tal che non vi fosse luogo alla rotazione per nessun verso, allora in questo caso equipollente quanto al fondamento e agli effetti al passato, l' appoggio unico A (che diventa il *centro di gravità* per le cose da dirsi in appresso) sopporterebbe parimente un carico equivalente a tutte insieme le forze: e verificherebbesi appunto l' inverso come nel Corollario VI., mentre supposta una forza sola nel *centro di gravità*, dovesse repartirsi e diffondersi sopra i punti d'appoggio agli estremi de'raggi, o alla circonferenza del lembo, per l' intermezzo delle corrispondenti leve o braccia frapposte quando avessimo dalla Statica (ved.

Corol. VI. del Teorema di questo Articolo) sufficienti dati per *determinare* individualmente i valori di regresso di sì fatte forze parziali.

Scolio.

1. S' aspetta ai Fisici sperimentali, ed al sagacissimo Giorgio Atwood principalmente, il quale col rallentare il moto, senza disturbarne la legge nè tampoco la direzion verticale, ha saputo sottoporre al cimento d' una misura precisa l' accelerazione della caduta de' gravi, di confermare per via d' una Macchina misuratrice esatta delle pressioni (ex. gr. perfezionando il Dinamometro *a molla* di Leroy, o l' altro *a settore ed indice* di Regnier) le conseguenze teoriche relative agli appoggi nei diversi accidenti esposti di sopra, tanto ove tutte le forze si raccolgano in uno, quanto dove una forza sola suddividasi in molti. Questo fu il mio desiderio nel Discorso, che pronunziai verso la metà di Marzo del M.DCCC.I. in occasione del solenne riaprimento efimero dell'Accademia rinomatissima del Cimento. Per adesso ognun vede anco indipendentemente dalle esperienze, che la resistenza d' un Solido o prismatico o cilindrico, incastrato *a stretta* in una muraglia colla sua base, intanto riceve dal più lungo braccio di leva maggiore facilità ad esser vinta col medesimo peso, non già perchè questo peso a maggior distanza faccia più forza contro l' appoggio, qual è lo spigolo, taglio, o punto inferiore della base predetta (che anzi la farebbe sempre eguale pel Corollario V., ammessa la coerenza o tessitura invincibile della grana o fibre, le quali compongano il Solido), ma piuttosto perchè avanti di rompersi, o nell' assunto di Galileo o nelle altre moltiplici ipotesi scelte in correzione di quello da Leibnitz, Mariotte, Parent, Varignon, Bernoulli, ec., o nell' ultima sagacemente indicata da Mozzi, si suppone dover prestarsi il Solido stesso ad un movimento di rotazione sopra l' appoggio, d' onde addiviene che alla forza *assoluta* di strappamento contra la coesione

del Corpo (come sarebbe se venisse tirato da un peso per la direzione dell' asse o dovesse esser rotto mediante uno *stacco* tutto ad un tratto verticale, che il peso caudato si procacciasse portandosi seco l' appoggio) subentri la *relativa* o di vette nella rottura.

2. Avendo nel Corollario VI. fatta parola del *Centro d'oscillazione*, pochi sapranno che Galileo contemplasse avanti dei moderni Dinamici anco le vibrazioni di Pendoli composti di due o più globetti attaccati ad un filo incurvato o piegato nel suo viaggio (fuori del mezzo ove rendesi verticale e tutto rettilineo), siccome apparisce e dal discorso sulla *catenuzza* vibrante e dalla figura disegnata a proposito nella *Giornata* II. del *Dialogo* sopra i Sistemi Tolemaico e Copernicano : figura, che appena vista suggerisce tosto l' accorgimento di speculare intorno agli astrusi problemi, dall' Analisi-sublime o mai sciolti, dell' *oscillazione* de' fili o catene, non meno che delle lame-elastiche, e delle corde-sonore, come di tutte le piccole *oscillazioni* scempie o composte de' sistemi di punti, sempre *isocrone* attorno allo stato di riposo o equilibrio *stabile* disturbato. Non di rado intravviene, che non ponendosi bene al fatto delle scoperte anteriori, o si dian come nuove alcune vecchie Teoriche, o apparendo mutate di forma o larvate non si riconoscano altrimenti per queste. Bernard, per esempio, ha ragione quando sulla fede d' un Codice di Choaga Nasirodino Tusio Persiano, esistente nel Museo Mertonerse d' Oxford, d' onde trasse le *Tavole Ilcaniche* da lui pubblicate della *longitudine* e *latitudine* delle Fisse verso il secolo IX., dice che gli Arabi furono i primi a servirsi, oltre delle Clepsidre idrauliche, dell' *isocronismo* d' un Pendolo come acconcio più d' ogni altro istrumento ad assegnar la misura del tempo; ma questa pratica essendo stata obliata dipoi, riman sempre ferma l' originalità della fertilissima invenzione in onor del Filosofo Fiorentino : ed ha poi torto Freret altrove aggiungendo, che Riccioli avanti di tutti applicasse il Pendolo agli

usi astronomici, perochè Galileo già lo aveva indicato e prescelto per la ricerca delle *longitudini* in Mare nelle sue Memorie agli Stati-Uniti d' Olanda. Chi dicesse, per altro esempio, che il *centro spontaneo di rotazione* del Corpo qualunque M (Fig. 31.) si mantiene costantemente nel punto medesimo C cambiando quanto si voglia la situazione del Corpo medesimo intorno il suo *centro di gravità* G, immobile nello spazio, e conservando la direzione ed *eccentricità* della prima o comunque diversa forza impellente per RS; e chi oltrediciò soggiungesse, che dalla predetta forza e nella medesima direzione, cioè paralella a RS, urtato l' istesso Corpo (situandolo ancora quì a piacimento intorno del *centro di gravità*) nell' estremo C della coda *rigida* o leva, avrebbe S, primo punto dell' urto eccentrico, per nuovo *centro spontaneo di rotazione;* avanzerebbe due proprietà elegantissime, e forse non avvertite da altri, ma prevenute in parte da Huygens quando ei mostrò la reciprocità de' due centri di *sospensione* e d'*oscillazione*, e nel resto conseguenze assai facili delle formule conosciute. Questa ultima riflessione, per terzo e finale esempio, non sarebbe fuor di proposito a buon diritto farla ancora valere per quelli, i quali contemporaneamente calcando quasi l' istesso sentiero corressero e dimostrarono la Serie-infinita assai convergente pubblicata da Keil, a fine di rintracciare il *logaritmo* d' un numero n, dati i due di $n - 1$ e $n + 1$ e perciò la lor differenza; il che viene ad essere un semplicissimo caso abbracciato infra i tanti dall' altra Serie prodotta nell' Introduzione alle *Tavole matematiche* di Sherwin illustrate da Clark, e relative a $L(p+y) - Lp$, molto men ovvia dell' altra e per tal titolo più meritevole di commentario analitico. Nè per vederlo fa di mestieri riprendere l' argomento sin da lontano. Basti dire che o adoperata una Serie *supposititzia* o mediante l' equipollenza (che sono entrambi antichi, indiretti, ed agevoli metodi, cogniti fin dall' origine delle Serie) non si giunge per questo a ricavarla *direttamente* dal fondo dell' Algebra; siccome ha fatto di recente col metodo delle *derivazioni* Arbogast, magistralmente trattando e della nota Serie di Wallis per la *quadratura* del Cerchio e di quella non meno comune $L(1+z) = \frac{z}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(1+z)^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{(1+z)^3} + \frac{1}{4}\frac{z^4}{(1+z)^4} +$ ec. Se non che nella Teoria delle *Derivazioni* mi parrebbe accettabile il piano di attender più a conservare l' analogia ed uniformità della nascita di *funzione* da altra *funzione;* di modo che tanto per le algebraiche, quanto per le trascendenti, non ignorandosi che si possono esprimer tutte o sono espresse difatti e rappresentate da formule (ora di finito, ora d' infinito numero di termini) composte di *potenze* o perfette o imperfette delle *variabili*, l' Analisi intera sì delle *differenze* finite, piene o parziali, che delle infinitesime, dipendesse dal solo e chiaro principio della *differenziazione delle potenze*, e si mantenesse in proposito di questa e delle *somme* o *integrali* quel *lucidus ordo*, che tanto piacque con ragione ad Orazio. Così venendo al caso della *funzione* primitiva $L(x)$ (suppongo *logaritmo* Neperiano, mal chiamato Iperbolico) e rappresentandola in guisa di *potenza*, cioè $\frac{x^{-1+1}}{-1+1}$ ossia $\frac{x^0}{0}$ come la dà direttamente l' Analisi, conseguirebbesi subito, alla pari di tutte le altre *potenze* e colla stessa *falsariga* di calcolo senza ulteriori artificj $L(x+i) - L(x) = \frac{0 \cdot x^{0-1} i}{0} + \frac{0 \cdot 0-1 \cdot x^{0-2} i^2}{0 \cdot 2} + \frac{0 \cdot 0-1 \cdot 0-2 \cdot x^{0-3} i^3}{0 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{0 \cdot 0-1 \cdot 0-2 \cdot 0-3 \cdot x^{0-4} i^4}{0 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$ ec. $= \frac{i}{x} - \frac{i^2}{2x^2} + \frac{i^3}{4x^3} - \frac{i^4}{4x^4} +$ ec. Parimente (lasciando di dire delle *funzioni esponenziali*, come quelle che sono più vistosamente *potenze*) ognun sa che cos. $(x+i)$

— cos.

$$-\cos.(x)=\left(\frac{e^{(x+i)\sqrt{-1}}+e^{-(x+i)\sqrt{-1}}}{2}\right)-\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right);$$ ed immantinente si scorge che quella differenza sviluppasi col principio solito delle *potenze* nel modo seguente, conservata chiarissima la medesima origine di tutte le *funzioni* derivate o successivi coefficienti *differenziali*, cioè

$$\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}.e^{i\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}.e^{-i\sqrt{-1}}}{2}\right)-\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)=-\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)i$$

$$-\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)\frac{i^2}{2}+\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)\frac{i^3}{2.3}$$

$$+\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)\frac{i^4}{2.3.4}-\text{ec.},$$ dove la *primitiva* e le *derivate* espressioni procedono tutte palpabilmente secondo la medesima legge. Con questo mezzo la Dottrina delle Serie o delle *Funzioni* generate e generatrici s' inalza al segno dell'evidenza; e qualora si voglia portare allo schiarimento non tanto delle *Funzioni* del Circolo e delle *analoghe* dell' Iperbola Apolloniana, quanto della Geometria elementare e di tutte le coniche Curve, sul modello venutoci per retaggio da Archimede in proposito della misura della superficie della Parabola, come ha fatto Legendre a fin di determinare la dimensione della capacità o volume d' una Piramide, basta solamente esser cauti di non traviare chi legga collo scrivere a contrassenso la Serie $b\omega\left(1+\frac{h^3}{(h-\omega)^3}\right.$

+

$+ \frac{h^6}{(h-\omega)^6} + \frac{h^9}{(h-\omega)^9} +$ ec.) quand' era d' uopo scriverla $b\,\omega \left(1 + \frac{(h-\omega)^3}{h^3} + \frac{(h-\omega)^6}{h^6} + \frac{(h-\omega)^9}{h^9} + \text{ec.} \right)$, onde aver per *generatrice* sua propria $\frac{b\,h^3\,\omega}{h^3 - (h-\omega)^3}$ e farsi $\frac{b\,h}{3}$ nell'ultimo limite di ω, posta b la base, h l'altezza del Prisma. Abbiamo contuttociò ricchezze immense nei Classici per non aver l' obbligo d' introdur nella Sintesi con simili sussidj analitici: se talvolta intravenne che *inopes nos copia fecit*, di soventi ciò accadde perchè si giudicarono nuove certe Proposizioni geometriche pubblicate in iscritti anco della maggiore celebrità; infra le quali mi sovvengono adesso i bei Teoremi accennati nei Commentarj alla *Sfera* di Hallifax o Sacrobosco sopra i Poligoni regolari circoscritti ed inscritti nel Circolo, uno de'quali *isoperimetro* all' ultimo, ed il Problema che stabilisce la Periferia circolare come *luogo geometrico* delle rette, che partendosi da due punti dati ed insiem concorrendo conservino l' istessa ragione, che furon quindi prodotti da Giacomo Gregory e dal prelodato Legendre senza citare i *Dialoghi* di Galileo e le Opere di Fermat ove sono maestrevolmente trattati. Io non dirò degli abbagli, in cui risicano di spesso incorrere gli Eruditi mentre si recano a scrivere di Matematica. Fabricio infra gli altri moltissimi confonde nella sua *Biblioteca Greca* Isacco con Enrico Newton, abbenchè citi come letto da lui l'elaboratissimo Elogio del primo inscrito da Fontenelle negli *Atti* dell' Accademia delle Scienze di Parigi, non meno che l' autorità di Reyneau, che potevano ben servirgli di scorta. Vossio suppone che Leonardo Fibonacci Pisano fiorisse verso il M. CCCC., e che i suoi Scritti sull' Algebra siano oggigiorno smarriti; quando altri Dizionarj, contando sopra la sua parola, pretendono che l' introduzione di questa Scienza in

Europa avvenisse non prima del cadere del secolo XV. a tempo di Luca dal Borgo o da San Sepolcro. Bossut (non Filologo ma Geometra addottrinato) asserisce l' istesso in sulla fede del Letterato Olandese; mentre pur troppo si sa, che visse Leonardo sul principio del secolo XIII. nell' età dell' Imperatore Federigo II., cui dedicò la sua Opera, che ancora intera e ben custodita fa parte dei MSS. della Biblioteca pubblica Fiorentina. È da osservarsi piuttosto che nei Corsi elementari sia indispensabile specialmente la massima accuratezza nel dar esempj delle Formule generali, ed esser certissimi della nuovità loro, quando avventurano gli Analisti di render pubbliche le proprie scoperte. Lecroix deduce dalla nota Serie-infinita pei *logaritmi*, cioè $lz = 2\,le\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \text{ec.}\right]$ il *Logaritmo-iperbolico* del Numero $5 = 2\left[\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{3}{5}\right)^7 + \text{ec.}\right]$, mentr' esso visibilmente risulta $2\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7 + \text{ec.}\right]$.

Leggo che Trembley volendo spiegare un *Paradosso* (com'ei lo chiama) *analitico*, decanta per refrattarie e ribelli a ogni metodo conosciuto d' *integrazione* diretta le due semplicissime Equazioni *differenziali* $\frac{dy}{dx} = (1 + 2ix)z$, $\frac{dz}{dx} = -(1 + 2ix)y$; e per farne credere la soverchia difficoltà d' *integrarle*, cita l' autorevole testimonianza del principe degli Analisti Lagrange. Eppure riscontrando l' Autorità, incontinenti si trova che Lagrange s' esprime al contrario in questi termini puntuali, parlando delle Equazioni me-

medesime „ dont *on sait* que les intégrales exactes & complettes sont de la forme $y = \text{A Sin}\ (x + ix^2 + a)$, $z = \text{A Cos.}\ (x + ix^2 + a)$ „: nè valeva certamente la pena d' insegnarne più di recente l' *integrazione*, che si presenta subito dal confronto palpabile delle due Equazioni *differenziali* colle note *flussioni* trigonometriche $d\ \text{Sin.}(\varphi x) = d(\varphi x)\ \text{Cos.}(\varphi x)$, $d\ \text{Cos.}(\varphi x) = -\ d(\varphi x)\ \text{Sin}\ (\varphi x)$, che sono oggimai a colpo d' occhio riconoscibili da chicchessia.

3. Posto che a fine di rintracciare la propagazion della forza su tutti i punti della verga della Bilancia considerata nel Lemma, in vece di dedur l' equilibrio, siccome ho fatto, dall' evidente principio d' *identità* col separare le condizioni della tendenza alla rotazione da quella indipendenti affatto e sconnesse dalle prime (e perciò da valutarsi a parte) della tendenza alla traslazione, fosse piaciuto ricorrere alle *funzioni analitiche* sull'esempio di Foncenex, Dalembert, Fourier, ec., in proposito dei veri *momenti* (Ῥοπὴ) relativi alla Leva, sarebbe stata a mio credere per mancanza di dati frustranea ed inconcludente l' impresa. Sia difatti a tanto l' una che l' altra forza normale e contraria sollecitanti le due estremità della verga AB (Fig. 32.), la cui lunghezza pongasi b: è certo che chiamando x la *variabile* AC, AD, ec., e perciò CB, DB, ec. $= b - x$, e dovendo esser sempre il punto C, D, ec., per la natura dell' equilibrio, animato da due forze eguali e direttamente contrarie, questa condizione porta alla conseguenza, che sì l' una che l' altra delle forze medesime propagatasi fino a C, D, ec., venga rappresentata da $F(a, x) = F(a, b - x)$; intendendo per la Sigla F qualunque siasi *Funzione arbitraria*, fra le *continue* o *discontinue* eziandio a senso d' Euler, che il primo introdusse l' ultime nell' Analisi per generalizzare la soluzione del gran Problema delle Corde vibranti e della propagazione del Suono, dove lo stesso Newton cadde sottilmente in paralogismo. Avremo di più per altra condizione, che tanto in A, quanto in B punti estremi, cioè quando $x = 0$, $x = b$, di-

diventino $F(a, x) = a, F(a, b-x) = a$. Resterà tuttàvia sempre *indeterminata* in virtù di queste sole due condizioni la specie della *Funzione* (come in un caso consimile di $F(x) = F(a+x)$ parve singolarissimo a Dalembert) : imperciocchè sono entrambe verificate da qualunque Linea, ch' abbia per asse IG alzata perpendicolare alla verga AB dal di lei punto medio I, o HI respettivamente ; mentre si facciano HI, IG comunque piccole o grandi a paragone di AK, BL esprimenti a, o sivvero ciascuna delle due forze eguali o il *parametro* che debba dirsi. Tra l' infinito numero di queste Curve soddisfacienti ad entrambe insieme le condizioni predette potrebbe immaginare taluno la Linea de' Coseni $y = a \,\mathrm{Cos.}\, \frac{2\pi x}{b}$, equivalente a quella de' seni trasportando il principio delle *ascisse* in I, o alla compagna della Cicloide, così rinomata fino dal tempo di Taylor, e renduta anco più celebre da Daniello Bernoulli per ispiegare con lusinghiero apparato, aggrupandone molte via via minori e combinandole una sull' altra, il fenomeno dell' imperfezione degli Istrumenti musici saltuarj, massime *a fiato*, come Trombe, Corni-da-caccia, ec., non meno che quello della *risuonanza* de' Corpi elastici avvertita da Rameau, o del *terzo suono* discoperto da Tartini, quai fondamenti del *contrappunto*, ed in generale di tutte le vibrazioni *sincrone* minutissime o escursioni insensibili di quà e di là dalla situazione dell'equilibrio *stabile* (Num. 2. precedente), che non è mai perfetto in Natura, le quali determinano il *tono* particolare d'ogni Sistema di punti materiali, e suggeriscono l' idea vera e non metaforica di quella universale Armonia, che Pitagora e Platone si figuravano di sentire contemplando le distanze o altri rapporti numerici della disposizione delle Sfere degli Astri. Ma l' andamento anguiforme di quella Curva, che nella verga AB sollecitata dalla forza AK mostrerebbe la comunicazione di questa ora spenta in C, D, ora direttamente te contraria per la lunghezza CD, e replicherebbe i medesimi *salti* in C', C'', ec., D', D'', ec. nell' indefinito prolungamento a destra o sinistra, ed in tutta la sua *positiva* pienezza ricomparirebbe solo in B', B'', ec., come in I, I', I'', ec. *negativa* segnando BB', B' B'', ec., II', I' I'', ec., DD', D' D'', ec. = AB, osta alla prova evidente già data (Corol. I. e V. del Lemma) che quando AK solleciti AB senza indur moto di rotazione, non possa a meno di muoverla o imprimerle una tendenza a muoversi tutta paralellamente a se stessa e nella sua direzione: lo che vuol dire, che si propaga e comunica in grado eguale a tutti i punti della verga AB, protratta comunque, e perciò che la *Scala* dei gradi di quella forza a diverse distanze dal punto A, sul quale agisce immediatamente, *Scala* indarno cercata colle *funzioni*, è la Retta KM (come LN riguardo a BL) paralella ad AB ed all' indefinito prolungamento della medesima. Ho supposto $\pi : 1$ il rapporto della periferia circolare al diametro, i cui due limiti vicinissimi ad agguagliarlo, uno in difetto $\frac{333}{106}$, l' altro in eccesso $\frac{355}{113}$, niuno finadora s' è accorto essere in così stretta corrispondenza coll' antica approssimazione datane da Archimede $\frac{22}{7}$, che 22 risulti da 355 — 333 differenza d' entrambi i *numeratori*, come 7 da 113 — 106 differenza dei due *denominatori*. Nè mai dovrebbesi a mio sentimento far credere, come opinan taluni, che le *funzioni arbitrarie* prendano solamente origine nell' Analisi dal maneggio dell' Equazioni a differenze (o piuttosto differenziali) parziali, finite infinitesime o miste; stantechè non debbe comparir nuovo come desse nascano ancora integrando Formule differenziali intere composte di più variabili *indipendenti*, o precedute da più *segni* d' integrazione, e come le *costanti* medesime aggiunte alle integrazioni comuni abbiano sempre da risguardarsi sotto l' aspetto di *funzioni arbitrarie* prima che dalle *condizioni* particolari de' Problemi, ai quali appartengano non vengano similmente che tutte l' altre ad essere *determinate* e di valore e di forma.

TEOREMA.

Due forze normali e paralelle sollecitanti le respettive estremità di una Verga di qualunque lunghezza, sostenuta o appoggiata sopra un punto immobile, ma libera nel rimanente, v' inducono l' equilibrio tutte le volte che il rapporto tra le medesime forze sia inverso o reciproco rispetto a quello delle distanze dal punto intermedio di sostegno o d' appoggio.

(Questo è il principio celebre della Leva a braccia diseguali infra loro; ed ognun sa, che per quanto gli Scrittori ordinarj della Meccanica suddividano il Vette in tre specie, contuttociò le due subalterne si riducono in sostanza alla prima quì unicamente considerata. I rapporti eguali delle forze e delle distanze potendo essere di grandezze commensurabili (*σύμμετρα*) o incommensurabili (*ἀσύμμετρα*), vi sarà luogo a distinguere la dimostrazione in due parti. Veramente provato il Teorema nel caso unico delle forze e distanze commensurabili, potremmo astenerci d' estender la prova all'altra ipotesi dell' incommensurabilità, seguitando l'esempio d'Huygens, Maclaurin, Darcy, Lagrange ec., i quali tutti si sono in ciò riportati alla teoria oggimai comune *de' limiti*, che come può vedersi in Bossut, agevolmente generalizza le proprietà delle grandezze commensurabili, o rappresentabili per mezzo di numeri interi alle incommensurabili, a scanso del giro lunghissimo negativo adoperato da Euclide, dal Geometra di Siracusa, ed in ultimo dal precitato Maclaurin. Ma mi ha ritenuto da seguitare sì fatto contegno lo scrupolo d' Hamilton, il quale pare non abbia veduto quant' era facile escir d' impegno imitando il modello della Proposizione VII. del Libro I. *degli equiponderanti* lasciatoci da Archimede. La di-

dimostrazione, che annetto, dell' equilibrio nella Leva diritta, e perciò dei *momenti*, unicamente suppone il Corollario I. dell' Assioma verso la fine, che torna a dire il fondamento medesimo della Bilancia *semplice* Archimedea, più il Corollario IV. in calce, il Corollario VI. ed il principio del Corollario VIII. del Lemma, ch' hanno per base l' *identità*, cui s' appoggia l' istessa Bilancia, di tal maniera che toltene tutte le illustrazioni, le quali cammin facendo sonosi aggiunte di sopra a proporzione che l' argomento ce ne somministrava il proposito, dal solo Assioma quasi immediatamente dipenda la prova di questo Teorema e dalla Geometria elementare, che posto quell' Assioma signoreggia ed ha sempre signoreggiata tutta la Statica speculativa. De' Teoremi geometrici non farà di mestieri mettere in opera fuori che quelli concernenti i regolari Poligoni *imparilateri*; giacchè i *parilateri*, siccome è facile accorgersi, ci ricondurrebbero sempre senza far passo, più presto che al Vette, alla solita antica Bilancia di braccia eguali.)

PARTE I.

Quando le forze e le distanze siano commensurabili.

Incominciando dalla Bilancia *trifida* regolare, come più semplice dopo l' Archimedea, ed essendo questa (Fig. 33.) alla pari di tutte l' altre regolarmente raggiate che consideremo in appresso, della classe delle *asteroidi* (Coroll. I. dell' Assioma), tre forze eguali, normali al suo piano, e della medesima direzione, che la sollecitino in A, B, C, la tengono in equilibrio se sia appoggiata o sostenuta in I di lei centro. Ma le due forze che agiscono in B, C, hanno per propria *risultante* ed equivalente di paralellismo, quantità e posizione la loro *somma* o il doppio di ciascheduna di loro nel punto medio D della retta BC (Coroll. IV. e VI. del Lemma); ed abbiamo di più dal Corollario VIII. che il fulcro o ipomoclio I sopporta una pressione equipollente alla *somma* delle tre forze ossia al triplo d' una delle medesime. Dunque è in equilibrio una Leva o Vette diritto AID ogni volta che il fulcro sia in I, il braccio AI doppio di ID (in virtù della natura puramente geometrica del Triangolo equilatero, i cui lati passerebber pei punti A, B, C, accennati nella Figura), e viceversa in A solleciti la Forza F, in D la Forza 2F, paralelle e normali alla Leva. E come si fa manifesto, che in questo primo e semplicissimo caso le forze si reciprocano colle distanze dall' ipomoclio, così non è meno provato che questo soffra nella direzione medesima uno sforzo eguale a $3F = F + 2F$, o sivvero precisamente eguale alla *somma* delle due forze estreme. Quindi è che la Leva AID senza fulcro si manterrà eziandio in equilibrio con tre forze, che la sollecitino, ad essa normali e paralelle infra loro, cioè F in A, 3F in I (direttamente contraria), 2F in D della medesima direzion della prima. E perchè manca altresì in questo caso ogni moto di traslazione e di rotazione, vorrà dire che F a tripla distanza da D faccia un effetto equipollente a 3F in distanza subtripla dal punto istesso, come 2F in distanza da A rappresentata da 3 equivalga a 3F in distanza rappresentata da 2 e collimante al medesimo estremo. In conseguenza di che il Teorema frattanto viene ad essere dimostrato nella triplice combinazione possibile dei tre primi numeri *naturali* 1 e 2, 1 e 3, 2 e 3, reciprocandosi in tutte colle distanze le forze.

Nella Bilancia *asteroide quinquifida* (Fig. 34.) col fulcro centrale in I, sollecitata agli estremi di tutti i suoi raggi da cinque forze F normali al di lei piano, della medesima direzione e valore, verificandosi l' equilibrio (Corol. I. dell' Assioma), le due forze eguali, che agiscono in B, C, hanno per *risultante*, come sopra, 2F in O punto medio di BC, e le altre due parimente eguali, che sollecitano i punti G, E, per *risultante* 2F in P punto medio di GE; mentre in virtù dell' istesso motivo la *risultante* di 2F in P e di

2F in O (Coroll. IV. e VI. del Lemma) opera in D punto medio di PO, che cade sopra il *cateto*. L'ipomoclio I è poi gravato (Corol. VIII.) da una forza equivalente a 5F; e sappiamo dalle proprietà elementari del Pentagono come Poligono regolare, che DI : IH :: IO : IG :: Triangolo IBO : IBG, e IH : IA :: IBG : IBAG Quadrilatero : laonde DI : IA :: IBO : IBAG :: IBO : 2IBA :: 1:4; ch'è quanto dire la Leva diritta con F in A, 4F in D, 5F in I fulcro somministra un altro caso dell'equilibrio, dove le Forze normali al Vette e paralelle infra loro sono nella ragione inversa delle respettive distanze dal punto d' appoggio, e si concentra in questo la *somma* F+4F delle bilanciate due forze estreme. Adunque conseguiremo tre nuovi casi d'equilibrio nel Vette, cioè F, 4F alle distanze 4, 1 dal fulcro intermedio, F, 5F alle distanze 5, 1 da D, e finalmente 4F, 5F alle distanze 5, 4 da A, figuratasi (come sopra) in I la forza 5F direttamente contraria alle altre due F, 4F nel sistema AID delle bilanciate tre forze. Aggiungasi che dei dieci *binarj*, cui si prestano i cinque numeri *naturali* 1, 2, 3, 4, 5, essendone già verificati sei nella Leva, e vale a dire 1, 2 ,, 1, 3 ,, 2, 3 pel primo caso, 1, 4 ,, 1, 5 ,, 4, 5 in virtù del presente, le quattro rimanenti *combinazioni* si riducono a tre, atteso che quella di 2, 4 è l'istessa di 1, 2, come manifestamente si vede. E se 5F si equilibra con F alle distanze 1, 5, e F con 2F alle distanze 5, $\frac{5}{2}$, anco 5F, 2F alle distanze dal fulcro 1, $\frac{5}{2}$ o sivvero 2, 5 formeranno equilibrio. Così parimente 5F equilibrandosi con F alle distanze dall' ipomoclio 1, 5, e F con 3F alle distanze 5, $\frac{5}{3}$, ne seguirà l' equilibrio di 5F, 3F quando le distanze si corrispondano nella ragione di $1 : \frac{5}{3} = 3 : 5$ sua equipollente. Quanto poi all' ultimo binario 3, 4, non ha nemmeno bisogno di prova ricavata da questo caso secondo, subito che sapendosi dal primo caso, che 3F, 2F producono l' equilibrio a 2, 3 di respettiva distanza dal fulcro, come 2F, 4F a 3, $\frac{3}{2}$ di distanza da esso, viene ad essere indubitato eziandio l' equilibrio di 3F, 4F in distanza di $2 : \frac{3}{2} = 4 : 3$ dal medesimo fulcro sopraccitato, per la solita regola dell' *egualità ordinata* o delle *ragioni composte*.

Passando a parlare dell' *Asteroide septifida* (Fig. 35.) con sette forze F agli estremi de' raggi, normali a ciascheduno di loro, paralelle ed eguali, appoggiata al centro I come fulcro, e perciò in equilibrio (Corol. c. dell' Assioma), questo ipomoclio soffrirà la pressione equipollente a 7F pel Corollario VIII. del Lemma. In oltre la *risultante* delle due forze sollecitanti Z, C è 2F concentrata in B punto medio, come quella delle altre due L, P in G punto parimente di bisezione (Corol. VI. del Lemma). Ma essendochè nei due Triangoli identici BCM, GLN gli angoli BCM, GLN sono bisecati dai raggi CI, LI, e si ha immantinente $BO = \frac{OM}{2}$, $GR = \frac{RN}{2}$, n' avviene che 2F in B con F in M abbiano per *risultante* come sopra (pel primo caso) 3F in O, e dall' altro lato 3F in R mercè dell' istessa ragione, ed in conseguenza (per il Corollario IV. del Lemma) come ultima *risultante* di quantità, direzione e paralellismo 6F in D sul *cateto*. Ora le proprietà semplicissime dell' Ettagono come Poligono regolare insegnano a suggerimento degli *Elementi* che DI : IH : : IO : IG : : Triangolo IBO : IBG = 2IBH, e IH : IA : : 2IBH : 2IBA; e per conseguente DI : IA : : IBO : 2IBA; cioè DI : IA : : IBO : 2IBT + 2ITA : : IBO : 2IBO + 4IBO :: 1 : 6; per essere AB tagliata in T dal raggio IB di tal modo, che

AT = 2TB (come MB in O dall' altro raggio IC) a motivo dell'angolo AZB bisecato. Eccoci dunque alla Leva AID, nella quale le forze F, 6F s'equilibrano reciprocandosi le distanze loro 6,1 dal ipomoclio; ecco due Leve, dove F, 7F e 6F, 7F alle distanze dal fulcro come 7 : 1, come 7 : 6 somministrano l' equilibrio; ecco finalmente, a scanso di replica delle evidenti superiori avvertenze, dimostrato con tutta geometrica facilità l' equilibrio per i 21 *binarj* di forze rappresentate dai numeri *naturali* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ogni volta che queste normali al Vette e paralelle infra loro agiscano a distanze *inversamente* proporzionali rispetto ad esse dal punto d' appoggio.

Colla medesima aurea semplicità, posto il caso d'un'*Asteroide nonifida* (Fig. 36.), avremo evidentemente dal Corollario VIII. del Lemma la pressione in I di lei centro, ov'è il fulcro, eguale a 9F, e conforme portano i Corollarj I. dell'Assioma, che ci assicura dell'equilibrio in questa Bilancia colle solite *condizioni* espresse di sopra per rapporto alle forze sollecitanti, e IV. e VI. del Lemma di già più volte accennati, non potrem dubitare che divisi per metà in E, K, V, X, i quattro lati *immaginati* ZB, QM, TL, GP, non siano le *risultanti* delle otto forze eguali ridotte a quattro, 2F in E, 2F in K, 2F in V, 2F in X, e per l' istessa ragione, cumulata colle proprietà *elementari* dell' Enneagono in qualità di Poligono regolare, residuate in 4F che agiscono sopra O, e 4F sopra S, cioè finalmente 8F sopra D; di tal maniera che l'equilibrio si verifichi nella Leva AID appoggiata o sostenuta in I, e colle forze F in A, 8F in D paralelle, cospiranti e normali, situate alle estremità de' suoi bracci. Ma DI:IH::IO:IG::IBO (Triangolo) : IBG = 2IBH; e di più; come sopra, IH:IA::2IBH:2IBA = 2IBM; laonde ID:IA::IBO:2IBM::2IBO ossia IBOQ (Quadrilatero a quarto di Croce *cavalleresca*) : 4IBM = 8IBN, e vale a dire (in sequela della similitudine de'due Triangoli ortogonj QBN, NIO pel motivo degli angoli acuti eguali in B, I, e per la proporzione geometrica, che ne deriva, BQ : BN :: IN : IO, e fa eguali le aree IBOQ, IBN) ID : IA :: IBN : 8IBN :: 1 : 8, o sivvero in ragion *reciproca* delle rammentate due forze. Anco da sì fatta combinazione di forze F in A, 9F in I, 8F in D, ricaviamo tre sistemi diversi d' equilibrio nel Vette AID, e sempre colle distanze dal fulcro delle forze sollecitanti in proporzione *reciproca* delle medesime; cioè (oltre a F, 8F alle distanze dall' ipomoclio come 8 : 1) F, 9F alle distanze 9 : 1, 8F, 9F alle distanze 9, 8 dal punto d' appoggio. Dunque l' equilibrio nella Leva diritta, ferma stante la supposizione dell' enunciato, avrà luogo per le cose premesse in tutti i 36 *binarj* delle nove prime *cifre* numeriche *naturali*. Egli è poi ben facile di concepire, che i numeri di questi *binarj* sono i *triangolari* alternamente presi 3, 10, 21, 36, e così in infinito, come lo persuade la nota formula $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ (n essendo il numero de' lati o degli angoli d' un Poligono *imparilatero*) equipollente a $\frac{(n-1)n}{2}$, ch' è il numero *triangolare* dell' indice $n-1$ *pari*, il quale salta sempre di due unità procedendo regolarmente alle ipotesi successive d' altri Poligoni o *Asteroidi*, ch' hanno la moltitudine dei loro raggi corrispondente alla Serie dei numeri *impari*.

Adesso che vedesi chiaramente segnata la traccia delle operazioni *grafiche* da effettuare a fin di raccogliere tutte le forze men una, e ridurle a sole due che sollecitino i punti estremi d' una Bilancia semplice Archimedea, delle quali la *risultante* dee fare equilibrio per evidenza coll' unica forza lasciata all' estremità del raggio dell' *Asteroide imparilatera* qualunque ella sia; adesso che abbiamo osservato come la dimostrazione, sempre simile e consonante, attingasi dal medesimo fonte delle affezioni primitive geometriche d' ogni Poligono regolare, immancabili, facilissime, e costantemente le stesse; diventa inutile estendere questa agevol teoria ad altri esempj particolarizzati nell' Undecagono, Tridecagono, Quindecagono e rimanenti Poligoni *imparilateri* in infinito. Egli è troppo oramai di per se manifesto colla scorta già datane, che si conseguirebbero per ciascun caso d' *Asteroide* composta di raggi di numero *impari* n i risultati medesimi, cioè d' una Leva diritta con F all' estremo del braccio più lungo, $(n-1)$F del più corto, nF in senso contrario nel fulcro, e colle distanze *reciproche* rispetto a quest' ultimo delle due prime forze come $n-1:1$; d' onde nasce l'eguaglianza perpetua per ambedue del prodotto $(n-1)$F, ch' ha somministrata l' idea genuina de' loro *momenti*, e si deduce la *terna* ad un tempo de' Sistemi di Vette rappresentati da F, $(n-1)$F e distanze o bracci come $n-1:1$; F, nF e bracci come $n:1$; $(n-1)$F, nF e distanze come $n:n-1$ dall' ipomoclio o dal fulcro. E da ciò si rileva, che come nella Bilancia *semplice* d' Archimede, dove le braccia sono in rapporto d' egualità, a nulla monta che queste siano più o meno lunghe nè per l'equilibrio nè per la quantità della pressione concentrata nel fulcro, non altrimenti accada in proposito delle Bilancie raggiate, rispetto alle quali l'equilibrio si conserva l' istesso ed havvi lo stesso carico sull' ipomoclio intermedio comunque sian lunghi i raggi, purchè mantengano infra di loro il rapporto medesimo, cioè il *reciproco* delle forze. Nè manca d' esser chiaro eziandio che se nell' ipomoclio intermedio questo sopporta il carico della *somma* delle due forze. nell' ipomoclio situato a un estremo del Vette la pressione equivalga alla *differenza* delle due forze opposte. Così nella combinazione dell' equilibrio di tre forze F, nF, $(n-1)$F, la media delle quali agisca in direzione contraria alla prima e alla terza, F a un estremo, dove collocherebbesi il fulcro, pareggia $n\mathrm{F}-(n-1)\mathrm{F}$, come non diversamente $n\mathrm{F}-\mathrm{F}=(n-1)\mathrm{F}$ ponendosi all' altra estremità l'ipomoclio. Tutte adunque le *Asteroidi* possibili *imparilatere* dell' indice p (non escluso tampoco il *limite* loro, che sarebbe la Bilancia a numero infinito di raggi, corrispondente ad un Poligono regolare *imparilatero*, il quale si confondesse col Cerchio ed avesse per *terna* di forze, F all' estremo del raggio R, ∞F nel centro, $(\infty - 1)$F in distanza $\frac{R}{\infty - 1}$ dallo stesso centro o ipomoclio) conducendo direttamente alla *triade* solita delle forze F, $(p - 1)$F, pF facienti equilibrio in una Leva diritta colla medesima legge, e queste *triadi*, combinatele nel modo premesso colle precedenti, legandosi sempre talmente da formare una serie continuata di casi diversi di Leve per ciaschedun dei *binarj*, che son di numero $\frac{p(p - 1)}{1 \,.\, 2}$, relativi all' altra serie de' numeri *naturali* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., n, ..., p, ..., ∞, si può dir con ragione essersi pienamente provata la I. Parte del presente Teorema. Se non che volendolo dimostrare in ogni caso coll' applicarvi *graficamente* le solite proposizioni elementari attenenti a tutti i Poligoni regolari, non farebbe mai di mestieri sperimentarne individualmente l' applicazione a ciascuno. Imperciocchè delle *terne* primitive, che costituiscon la Serie 1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7; 1, 8, 9; 1, 10, 11; 1, 12, 13; ...., 1, $2m$, $2m + 1$, ec., dove i medj d' ogni *triade* son tutti i numeri *pari* e gli ultimi *dispari*, si dovrebbero eccettuare le combinazioni speciali di Leve derivate dalle più semplici precedenti senz' altro bisogno di prova. Per esempio dal caso 1, 2, 3 derivano all' infinito le combinazioni nel Vette relative ai numeri in progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., 2^n, ..., 2^∞, non meno che 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ..., 3^n, ..., 3^∞, che sono altrettante repliche del primo caso: e l' istesso direbbesi di qualunque dei rimanenti *ternarj*. Può vedersi dalla Figura 37. con quanta eleganza inscrivendo nel Triangolo equilatero dato ABC, via via in situazione contraria, altri Triangoli equilateri senza fine DFG, EKL, HNO, MQR, ec., il Vette diritto AID somministri l' equilibrio non solo di F in A e 2F in D, ma ancora i suoi derivati F in A, 4F in E colle distanze da I, che sono IA, $IE = \frac{ID}{2} = \frac{IA}{4}$; F in A, 8F in H colle distanze da I, che sono IA, $IH = \frac{IE}{2} = \frac{ID}{4} = \frac{IA}{8}$; F in A, 16F in M colle distanze da I, che sono IA, $IM = \frac{IH}{2} = \frac{IA}{16}$; F in A, 32F in P colle distanze dà I, che sono IA, $IP = \frac{IM}{2} = \frac{IA}{32}$; e così in infinito. L' istessa configurazione per iscrizioni inverse o contrarie s' adatta a tutti gli altri Poligoni regolari *imparilateri*, Pentagono, Ettagono, Enneagono, Undecagono, ec., d' onde deriverebbero, siccom' è manifesto, nuove geometriche progressioni, mercè delle quali le prove *grafiche* particolari suddette si restringerebbero a quei soli Poligoni, il cui numero *dispari* o indice denotante la moltitudine de' lati fosse un numero *primo*. E quanto ad assegnare il carico ossia pressione del fulcro I in tutte le repliche o derivazioni accennate, questo immediatamente s' ottiene dal Corollario VI. del Lemma.

Tuttavolta ella è di tanto interesse questa prima e fondamentale verità della Statica, e dee comparire di tanta vaghezza la maniera facile di ricavarla dalle *elementari* regole di Geometria, che per togliere qualunque scrupolo che mai rimanesse, gioverà dimostrarla generalmente ad un colpo solo con un Teorema universale che abbracci l' intera famiglia dei Poligoni *imparilateri*. Dopo fatto ciò vedrà ognuno, che qual ch' ella sia o l' una o l' altra delle combinazioni *primarie* d' una Leva diritta contenute nella formula del *ternario* generico 1, n, $n - 1$, dove n è numero *dispari*, essa non rappresenta in sostanza che un' *Asteroide* in compendio, rannicnicchiata, avviluppata, sfigurata come gli Animali o le Piante nel germe loro o embrione: laonde dovrà cessare ogni maraviglia di questo vantato *mistero* dell' equilibrio nel Vette, tosto che il medesimo Vette (da cui poi nascono i *derivati* come conseguenze immediate) si sviluppi difatto o si svolga in una Bilancia sciolta regolare, raggiata, ch' ha la stessa evidenza intuitiva della semplice Archimedea. Al vedersi davanti agli occhi un di quei Vetti a braccia diseguali dirà chicchessia, distendendolo coll' immaginazione e sgomitandolo quanto convenga — ,, Quì sta nascosta sotto cortina o larvata ,, un' Asteroide di grado n; me la raffiguro di subito raffazzo- ,, nata e scoperta; e mi rendo incontanenti ragione con tutta ,, chiarezza, e senz' altro esame, della necessità ed eviden- ,, za dell' equilibrio. ,, — E lo dirà con franchezza maggiore, e più agevolmente riconoscerà nella Leva una raccorciata e raggruppata *Asteroide* quando, come va a farsi ora palese, un Vette diritto gli si presenterà in modo semplice non esser altro che l' insieme o l' assembramento di molte Bilancie o *Libre* d' Archimede, infilate tutte pel mezzo delle lor braccia ossian verghe, le quali vanno a finire negli estremi di ciascun raggio della corrispondente Bilancia *asteroide*.

Iscrivasi dunque in un Circolo (Fig. 38.), per ultimo pregio e compimento dell' opera, qualunque Poligono *imparilatero* regolare con tutti i suoi raggi, che rappresentino l' *Asteroide* equilibrata sul proprio centro. Sia n l' indice *dispari* del Poligono iscritto in un Cerchio di qualunque grandezza. Se si consideri la metà dell' arco LM determinata dal prolungamento del cateto IB, quest' arco ΔL viene ad essere eguale a $\frac{\pi}{2n}$, posta π la circonferenza, 1 il diametro AΔ. È oltrediciò Teorema *elementare* e di facilissima prova ed anzi intuitiva (a differenza di quelle proprietà geometriche men manifeste dedotte o dimostrate ampiamente da Lexell, Hutton, Lhuilier, Carnot, ed altri, intorno i Poligoni e Poliedri) che sempre Cos. $(n-1)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-3)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-5)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-7)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-9)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-11)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-13)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-15)\frac{\pi}{2n}$ + ... + Cos. $(n-n)\frac{\pi}{2n}$ + ... + Cos. $(n-17)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-19)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-21)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-23)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-25)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-27)\frac{\pi}{2n}$ + Cos. $(n-29)\frac{\pi}{2n}$ + ... + Cos. $(n-(2n-1))\frac{\pi}{2n} = 0$, essendo n il numero de' termini per ogni caso particolare. Ciò vuol dir, riducendo, $2\left(\text{Cos.}\frac{\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{3\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{5\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{7\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{9\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{11\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{13\pi}{2n} + \text{Cos.}\frac{15\pi}{2n} + \ldots\ldots + \text{Cos.}(n-2)\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}$, ove sono di numero $\frac{n-1}{2}$ i termini del primo membro dell' Equazione trigonometrica universale o *cattolica*. Quindi è che IB + IC + IE + IF + ec. — IG — IH — IK — ec. $= \frac{\text{IA}}{2}$, e per conseguente 2F (IB + IC + IE + IF + ec. — IG — IH — IK — ec.) = F.IA, stando in B, C, E, F, ec., G, H, K, ec. le *risultanti* delle forze tutte eguali F, due a due, poste agli estremi delle Bilancie *semplici* Archimedee LM, NO, PQ, RS, ec., TZ, YZ, ΦΨ, ec., le quali coi loro punti medj aggravano o premono la Leva diritta AIB, di cui I pigiato con una forza equivalente a nF, stabilisce per evidenza, come centro delle forze riunite o ipomoclio, la situazione dell' equilibrio. Dunque

$$4F \cdot \frac{1}{2}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

$$6F \cdot \frac{1}{3}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

$$8F \cdot \frac{1}{4}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

$$10F \cdot \frac{1}{5}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

$$12F \cdot \frac{1}{6}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

$$14F \cdot \frac{1}{7}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

$$16F \cdot \frac{1}{8}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

. . . .

$$(n-1)F \cdot \frac{1}{\frac{(n-1)}{2}}\left(IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}\right)=F \cdot IA$$

ossia

$$(n-1)F\left(\frac{IB+IC+IE+IF+\text{ec.}-IG-IH-IK-\text{ec.}}{\frac{n-1}{2}}\right)=F.IA$$

ed è quanto dire, che sull' esempio di Monge, ove insegna con altri a trovare il *centro di gravità* de' perimetri dei Poligoni, raccogliendo e collegando infra loro per via di Bilancie *semplici*, o di Leve già anteriormente provate per mezzo di quelle, a grado a grado le singole forze eguali sparse sugli estremi de' raggi dell' *Asteroide*, col cominciare ad aggrupparne sul Vette AIB prima 4, indi 6, 8, 10, 12, 14, 16, ec. a seconda dei numeri *pari*, onde alla fine per via di consecutivi medj aritmetici (conforme ai casi speciali premessi) cumularle tutte men una, cioè $(n-1)$F, in quel punto, che giusta il vocabolo usato da Wallis e Leibnitz chiamano con ragione gli illuminati Meccanici *del medio Aritmetico* o *Centro delle medie distanze*, si conseguisce universalmente, col tener conto dei Coseni *positivi* e *negativi* nel valutare quei *medj*, $\frac{(n-1)F\left(\frac{IA}{2}\right)}{\frac{n-1}{2}} = F.IA$, o sivvero $(n-1)F.\frac{IA}{n-1} = F.IA$, sempre *positivo* o piuttosto dalla parte contraria di A per rapporto al centro I; come in generale dovea dimostrarsi.

PARTE II.

Quando le forze e le distanze siano incommensurabili.

Poche linee per gli intendenti concluderanno pienamente la prova. Abbiansi difatti due forze incommensurabili F', F'' sollecitanti (Fig. 39.) gli estremi A, B d' una Leva diritta di arbitraria lunghezza, e sian tali che $F' : F'' :: IB : IA$ parimente incommensurabili, mentre agiscono quelle con direzioni normali alla medesima Leva e paralelle infra loro. Se si nieghi che in questo caso, mediante l' interposizion della Leva, la *risultante* delle due forze (perpendicolare al Vette ancor essa) passi pel fulcro I, onde siavi equilibrio, sarà necessario affermare, che una forza minore o maggiore di F'' produrrebbe equilibrio, mantenute le distanze medesime e l' istesso ipomoclio. Facciasi la prima ipotesi della forza minore, che io segno $F'' - \Delta$. Egli è certo che si potrà sempre supporre, senz' alcun limite, una parte *aliquota* di F' sì piccola, che servendosene a misurare F'', avanzi meno della differenza Δ, la quale intercede tra F'' e $F'' - \Delta$. Avremo perciò due forze *commensurabili* F' e $F'' - \Delta + \delta < F''$, che saranno per la I. Parte in equilibrio, subito che $F'' - \Delta + \delta : F' :: IA : IC$; dovendo essere $IC > IB$ a motivo che $F'' - \Delta + \delta : F' < F'' : F'$, cioè $< IA : IB$. Laonde una forza maggiore $F'' - \Delta + \delta$ a maggior distanza dal fulcro IC sarà equipollente ad una forza minore in minor distanza dal fulcro medesimo qual è $F'' - \Delta$ rispetto a IB, perchè ambedue fanno equilibrio con F' alla distanza IA, ed in conseguenza fra loro. Pongasi ora per il contrario che $F'' + \Delta$ procurerebbe equilibrio. Ancor quì potremo assegnare una parte di $F'' + \Delta$ sì grande e *commensurabile* in rapporto a F', che sebben minore di $F'' + \Delta$ sia però maggiore di F'', come $F'' + \delta$. Adunque in virtù della I. Parte $F'' + \delta : F' > F'' : F' > IA : IB$, e vale a dire $= IA : IO < IB$; o sivvero la forza minore $F'' + \delta$ applicata a distanza minore dall' ipomoclio IO starà con una forza maggiore $F'' + \Delta$ applicata a maggior distanza IB in equilibrio. Il resultato d' entrambe le ipotesi è conseguentemente l' istesso. Ma tal risultato è assurdo e impossibile. Conciossiachè (Fig. 40.) se nella Leva AIB potessero mai equilibrarsi $F - \Delta$ posta alla distanza minore AI dal fulcro e F alla distanza maggiore BI, ne verrebbe che la *risultante* loro passerebbe per I, e che ogni aumento comunque piccolo fatto alla forza $F - \Delta$ porterebbe la Leva a *rompere* o traboccare dalla parte di A, recando la *risultante* verso A (Num. 3. dello Scolio dell' Assioma), e recandola via via più vicina ad A, sempre per la causa medesima, a proporzione che più crescesse la forza; quando cresciuta finalmente di Δ si sa dal Corollario II. dell' Assioma fondamentale, che la *risultante* di due forze eguali F, F è dal lato opposto rispetto ad I, cioè passa pel punto O medio di AB, e farebbe così sbilanciare la Leva dalla parte contraria. Dunque ec. ec. Nè tampoco può cader dubbio intorno la posizione della *risultante* delle due forze eguali F, F in A e B nella retta media COD perpendicolare alla Leva, sul motivo che questa non sia affatto libera, o non abbia, come prescrive il Corollario predetto, ipomoclio situato nel mezzo in O, ma laterale in I, e più vicino all' estremo A che all' opposto. Imperciocchè, indipendentemente dal fulcro, è facile immaginarsi la Leva o Bilancia AB caricata dalle le due forze a' suoi punti estremi, libera e *in aria*, scender come dall' alto colla *risultante* intermedia COD, di posizione e grandezza sempre l' istessa, e venir finalmente ad applicarsi e posare sull' ipomoclio I: mentre si rende allora evidente dalla parte di B la preponderanza o sbilancio.

COROLLARIO I.

Egli è perciò manifesto, che la *scala* delle forze (Fig. 41.) nel braccio indefinito IS della Leva diritta per bilanciare la forza data normale AX posta alla distanza AI dall' ipomoclio, sarà il ramo OZP d' un' Iperbola Apolloniana riportata agli assintoti MN, TS, e che l' altro ramo QR determinerà il *luogo geometrico* delle forze *negative* o sollecitanti in direzione diametralmente contraria a quella della forza *positiva* indicata da AX, per i casi delle Leve diritte d'altra specie (o piuttosto *varietà*), nelle quali il fulcro I venga situato all' estremo, o siano entrambe le forze disposte dalla medesima parte, cioè in uno stesso braccio, e facienti equilibrio. Così restan sempre, com' esser debbono, eguali i *momenti* nel Vette semplice dalle due parti AIC, AID, AIB, AIE, AIF, ec., o da una parte sola GIA, HIA, AIA, KIA, LIA, ec. rispetto al braccio IT indefinito.

COROLLARIO II.

Anzi anco l' egualità de' *momenti* nel Vette composto viene con tutta chiarezza suggerita di subito dalla Geometria *elementare*. Per esempio, nell' *Asteroide* pentagona della Figura 34. dimostrasi immantinente rispetto alla Leva AIL, che $F.AI + 2F.IH = 2F.IL$: perocchè ciò dipende da provare $\frac{AI}{2} + IH = IL$; e questa eguaglianza si conclude così dalle proprietà del Pentagono come Poligono regolare. Condotte le rette BE, BL, ML, l' ultima è paralella a BC per la bisezione di BE ed EC; d' onde avviene che $\frac{AI}{2} + IH : IL$ stando come la metà del Triangolo ABI, cioè $BIO + HBI = HBOI : IBL$, ed IBL risultando da $IBM = HBI$ e da $IML + LBM$, ossia $IML + LCM = ILC = BIO$, la ragione di HBOI a IBL viene ad essere di perfetta eguaglianza. Parimente nell' *Asteroide* eptagona (Fig. 35.) e per rapporto all' altra Leva composta AIQ agevolissimo è il modo di provar l' equazione $F.IA + 2F.IK = 2F.IX + 2F.IQ$, cioè $\frac{IA}{2} + IK = IX + IQ$ corrispondente ai *momenti*. E difatti facili, abbenchè nuove, istruzioni geometrico-trigonometriche ci ammaestrano in proposito della Poligonografia, che nel Tesseradecagono ossia Rettilineo regolare di XIV lati il suo lato YM è paralello al diametro del Circolo circoscritto $LI\Phi$, sì che condotta $M\Delta$ equidistante da YI, viene a farsi $MYI\Delta$ un Paralellogrammo. Di più essendo eguali i due angoli $IM\Phi$, $I\Phi M$ in virtù del Triangolo equicrure $MI\Phi$, e tanto l' uno che l' altro pari all' angolo al centro dell' Eptagono, perchè misurati dalla metà dell' arco LNM, ed entrambi restando divisi nel mezzo dalle rette $M\Delta . \Phi\Gamma N$, sarà $I\Gamma = I\Delta = YM$, e $\Gamma\Delta$ a $M\Phi$ paralella. Preso adunque a piacimento in considerazione uno dei due Triangoli identici ed identicamente divisi, ognun vede che $M\Phi + \Phi I$, cioè (segnata $Z\Theta$ paralella al diametro AIY) $Z\Theta + \Phi I : \Phi I : YM$; e che essendo $IX = \frac{\Phi C}{2} = \frac{YM}{2}$, viene a rendersi $IX = \frac{I\Theta^2}{2(I\Theta + 2\Theta E)}$. Indi deriva, che avendosi la conosciuta *elementare* eguaglianza di $\frac{YM^2}{2IY} = 4\frac{\left(\frac{YM}{2}\right)^2}{2IY} = 2\frac{\left(\frac{YM}{2}\right)^2}{IY} = QY = \Delta\Theta = \frac{2.IX^2}{I\Theta}$, sia perciò $QY + 2UV = QY + \frac{2\Theta E}{I\Theta}.\ QY = \frac{2IX^2}{I\Theta} + \frac{2.2\Theta E}{I\Theta^2}.IX^2 = \frac{2(I\Theta + 2\Theta E)}{I\Theta^2} - IX^2 = \frac{IX^2}{IX} = IX$; laonde sapendosi per la bisezione di XQ in U, a motivo di quella di CM in Λ, essere $2UV = XV - VQ$, ne siegue $IX = QY + XV - VQ$, ed è quanto dire $IX + VQ = XV + QY = \frac{IY}{2} = \frac{I\Lambda}{2}$. Ma siccome, passando ai Triangoli compresi tra le due paralelle AI, $Z\Theta$, abbiamo $\frac{AZI}{2} + IZK = IKZB = \frac{I\Theta Y}{2} + I\Theta V = I\Theta X + V\Theta Q + I\Theta V = I\Theta X + I\Theta Q$, sarà ancora $\frac{IA}{2} + IK = IX + IQ$, cioè, secondo il già detto, $F.IA + 2F.IK = 2F.IX + 2F.IQ$; equazione solita de' *momenti* parziali nel Vette. Con questo medesimo metodo procederebbesi all' *Asteroide* enneagona ed altre *imparilatere* regolari consecutive, se di già, indipendentemente da farne una dimostrazione individuale, non la comprendesse per tutte generalissima la Teoria, ancor essa *sintetica*, applicata di sopra alla Figura 38. avanti di raccogliere o coacervare i *binarj* delle forze parziali. Nè può mancare di comparire singolarissima ed ammirabile la circostanza che nella pura Geometria de' Poligoni, e massimamente della *multisezione* degli angoli, si racchiudessero le proprietà tutte fondamentali dell' equilibrio, e che com' ho io altrove provate le novissime formule di Goudin mediante le note affezioni della conica Elisse, per la nascosta *ellitticità* delle quali la Trigonometria-sferica non era potuta mai giungere, siccome oggi è arrivata, a tutta la sua desiderevole semplicità e perfezione, non altrimenti (contr' ogni credere) la Poligonometria somministri le principali verità della Statica. Quindi è che sull' indicazione chiarissima di Pappo d' Alessandria avendo Guldino dedotte dal *centro delle medie distanze* le dimensioni delle superficie e dei solidi, massime rotondi, che Leibnitz e Varignon estesero ancora di più ai spazj curvilinei compresi fra le paralelle d' ogni maniera, non sarebbe malagevole impresa (sebbene impropriata) quella d' illustrare a vicenda e promuovere colle Leve composte la parte, che rimane ancora a scuoprire, della teoria de' Corpi Sferali dopo Archimede, Torricelli, Parent, e Zanotti. Mi giova solo accennar di passaggio, per non andar troppo lontano dal presente argomento, qualche brevissima osservazione intorno alle Serie delle *somme* de' Coseni degli archi di Circolo procedenti in progressione aritmetica. magistralmente trattate da Euler, Bossut, e Daniello Bernoulli. La *Somma*, per esempio, di $\text{Cos}.q + \text{Cos}.2q + \text{Cos}.3q + \text{Cos}.4q + \text{Cos}.5q + \ldots\ldots + \text{Cos}.nq$, mentre n rappresenti un numero *impariter-pari* conforme ai casi di sopra considerati ed espressi, e nq agguagli tutta la Periferia circolare, s' annulla; convincendolo subito l' inscrizion del Poligono, e confermandolo la Formula generale $\frac{\text{Cos}.q(\text{Sen}.nq + \text{Sen}\,(n+1)q - \text{Sen}.q)}{\text{Sen}.2q}$, che allora si converte in $\frac{\text{Cos}.q \times 0}{\text{Sen}.2q} = 0$, e niente pel nostro oggetto conclude. Ma se n fosse *impari*, tenuta ferma la seconda supposizione, quella *Somma* diventa egualmente *zero*, e conclude per altro verso la stessa Equazione de' *momenti*, o sivvero che il doppio de' Coseni *positivi*, fra i quali è il Raggio una sola volta contato, si fa pari (mutato il *segno*) al doppio de' *negativi*, siccome apparisce delineandone la Figura. Alla medesima resultanza conduce la *Somma* de' Coseni d' archi procedenti in progressione aritmetica saltuaria $\text{Cos}.q + \text{Cos}.3q + \text{Cos}.5q + \text{Cos}.7q + \text{Cos}.9q + \ldots\ldots + \text{Cos}.(2n-1)q$, che più si approssima a quella impiegata nella prova del precedente Teorema, ed anzi coincide con essa mantenendosi si le medesime supposizioni: imperciocchè ben intavolato e ridotto il general Termine *sommatorio*, viene a farsi

$$\frac{\text{Cos}.[q+2(n-1)2q]\times\text{Sen}.\frac{1}{2}[(n-1)+1]2q}{\text{Sen}.\frac{1}{2}.2q}=\frac{\text{Cos}.nq\times\text{Sen}.nq}{\text{Sen}.q}=$$

$\frac{\text{Sen}.2nq}{2\text{Sen}.q}=0$, com' esige appunto l' egualità de' *momenti* nella Leva composta. Una limitazione mi par che nasca da ciò relativamente alla Serie-infinita trigonometrica $\text{Cos}.q+\text{Cos}.2q+\text{Cos}.3q+\text{Cos}.4q+\text{Cos}.5q+\ldots\ldots+\text{Cos}.nq+\ldots.+\text{Cos}.\infty q$. che si vuol sempre $=-\frac{1}{2}$, ed intorno alla quale adoperata da Lagrange mosse dei dubbj Dalembert, e chiamò *futile* il modo intrapreso per dimostrarla di tal valore da Daniello Bernoulli colle regole della Probabilità e della *Ragion-sufficiente*: abuso, in cui cadde parimente dipoi Beguelin, intraprendendo la prova d' un difficil Teorema di Fermat. Infatti se venga iscritto in un Circolo un Poligono regolare di numero *pari* di lati, e suppongasi ∞ eguale a un *multiplo* di questo numero, e q eguale all' arco sotteso da uno de' lati, o se ancora il Poligono s' immagini *pari-infinitilatero*, non meno che ∞ eguale al numero de' lati o suo *multiplo* e $q=\frac{\pi}{\infty}$, ognun concepisce evidentemente che in ambedue i casi ideati la Serie indicata, più presto che $-\frac{1}{2}$, sia *zero*.

COROLLARIO III.

Parecchie e men ovvie proprietà elegantissime de' Poligoni regolari si raccolgono dalla dottrina premessa. Era noto agli antichi, che in un Triangolo qualunque s' incontravano in un punto comune, cioè nel *centro di gravità*, le tre rette condotte dai vertici degli angoli ai punti di bisezione dei lati opposti; laonde al solo *equilatero* credevasi che appartenesse insieme con ogni *isoscele* l'intersezione in un medesimo punto delle tre normali, che scendessero parimente dagli angoli sopra ciascuno dei lati. I moderni per via di deduzioni prolisse, e nominatamente la massima parte derivate dalle *funzioni* del Circolo, estesero anco quest'ultima affezione ai rettilinei Triangoli d' ogni maniera; laddove che io la dimostro coi primi rudimenti della Sintesi *lineare*. Calate difatti nel Triangolo ABC (Fig. 42.) le due perpendicolari BE, CF, a motivo degli angoli retti in E, F, una circonferenza di Circolo passerebbe per quattro punti A, E, I, F, come pei quattro F, B, C, E. Dunque l' angolo FAI = FEI = FCB; e perciò FAI complemento di ABD; e vale a dire AI prolungata diventa perpendicolare in D a BC terzo lato. — Hypsicle, Apollonio, o chiunqu' altri si fosse, speculando sopra i Pentagoni regolari trovò (Fig. 34.) che condotte due delle diagonali BE, GC, desse si tagliano sempre mutuamente nel punto S in *estrema e media ragione*; che il Quadrilatero ABSG era un Rombo; che i lati dell' Esagono e del Decagono regolari uniti insieme formavano una retta parimente divisa nel punto di loro unione in *estrema e media ragione*; che $(CE + EM)^2 = 5.EM^2$; e che finalmente il *cateto* IL del Pentagono s' agguaglia alla semi-somma del raggio (ossia del lato dell' Esagono) e del lato del Decagono iscritti o iscrittibili nel medesimo Cerchio. Nessuno avea però visto sin quì (o almeno non ho rimembranza ch' altri lo abbia accennato) essere il Quadrilatero BOIH diviso dalla diagonale BI come BE in S o sivvero in *estrema e media ragione*: giacchè BOIH = IBL in virtù della dimostrazione già datane sul principio del Corollario precedente; e $IBL : IBO : : LI : \frac{IA}{2} : : IO : \frac{IG}{2} : : IBO : \frac{IBG}{2} = IBH$. Oltrediciò ST differenza fra i due segmenti d' una delle diagonali, divisa dall' altra in *proporzione divina*, è la quarta proporzionale dopo EB^2, BA^2, BA; perchè EB : BA : : ES : ST, cioè $EB : BA :: \frac{BA^2}{EB} : ST$, d' onde nasce *permutando* la proporzionalità divisata. Parimente sapendosi dagli *Elementi* che $NQ^2 = 5\,IQ^2$, sarà eziandio per la similitudine de' Triangoli $AL^2 = 5.IL^2$, ed in conseguenza AL : IL (o sivvero *somma* del raggio e del cateto al cateto) : : HD : ID (eguale al quarto del raggio) : : $\sqrt{5} : 1$. Di più $IL : \frac{IA}{2} : IH$ ∺ ; perchè $IL.IH = IA.ID = IA.\frac{IA}{4} = \left(\frac{IA}{2}\right)^2$, siccome consta dal *dividendo*, o direttamente dai due GIH, DIO Triangoli simili. Anco l' Eptagono regolare, coltivato fino al presente pochissimo dai Geometri (tranne il Suardi), e che un Paralogista moderno s' avventurò in un suo fatuo *Programma* di far credere acconcio ad inscriversi dentro d' un Cerchio *cum regula & circino*, e segnatamente com' eguale di lato alla metà di quello del Triangolo equilatero conscrittibile, aprirebbe campo vastissimo a pellegrine speculazioni. In aggiunta di tutto ciò, che si è notato di lui e nella I. Parte del Teorema e nel Corollario prossimo antecedente, ed oltre ad essere (Fig. 35.) i Triangoli equicruri NAM (come avvisò ancora Tacquet), YIM, IΦΓ, ec., tali che ognuno de' due angoli eguali sopra la base sia triplo del terzo rimanente angolo al vertice, ed oltre a sapersi di più, che quando una circolare Semicirconferenza LYΦ dividasi in modo nel punto M, che l' arco LNM : MΘΦ : : 4 : 3 ossia in ragion *sesquiterza*, e chiamisi q il Seno-verso di $\frac{LNM}{4} = \frac{S\Theta\Phi}{3}$, venga ad essere

$$\frac{\text{Sen.} = \frac{q}{2}}{1 + 2\,\text{Cos.}\,2q} \qquad \frac{= \text{Sen.}\,\frac{q}{2}}{1 + 2\,\text{Sen.}\,3\frac{q}{2}}$$

, d' onde nasce pel

Poligono regolare di XXVIII. lati l'Equazione vaghissima trigonometrica $1 = 2\ \mathrm{Sen.}\frac{q}{2} + 4\,\mathrm{Sen.}\frac{q}{2} \times \mathrm{Sen.}\frac{3q}{2}$, havvi altresì da por tosto sott' occhio la proporzione $AQ : QK :: IK : \frac{IA}{2} = IS$, che mi propongo adesso di dimostrare. Abbiamo difatti $IK : \frac{IA}{2} :: 2IBK : IBA :: IGKB$ (cioè $IGZB$ per le paralelle GB, PZ) $: IAB$. Ma $IGZB = GIZ + ZIB = ZIQ + QIN = ZQN + ZIN = ZQM + AIM = KQM + AIM$ in virtù delle paralelle MN, ZP e di MN in Q bisecata. Dunque $IK : \frac{IA}{2} :: KQM + AIM : IBA :: \frac{MQ}{2}(QK + IA) : IBA$. Ed essendo $IBA = IBM = IBCM - BCM = ICMQ - CMQ = 3IQM - QXM$ (mercè delle paralelle MN, CL) $= \frac{MQ}{2}(3IQ - XQ) = \frac{MQ}{2}(2IQ + IQ - XQ) = \frac{MQ}{2}(2IQ + IX) = \frac{MQ}{2}(IQ + IQ + IX) = \frac{MQ}{2}(IQ + IK + \frac{IA}{2})$ pel Corollario precorso, si conseguisce $IK : \frac{IA}{2} :: \frac{MQ}{2}(QK + IA) : \frac{MQ}{2}(QK + \frac{IA}{2}) :: QK + IA : QK + \frac{IA}{2}$; e perciò *permutando* e *dividendo* $IK : \frac{IA}{2} :: QK + IA - IK : QK + \frac{IA}{2} - \frac{IA}{2} :: AQ : QK$. Anzi dalle note Formule trigonometriche con tutta facilità si ricava anco quest' altra proporzione finora ignota $AQ : QK :: IK : \frac{IA}{2} :: IZK : \frac{IZA}{2} :: I\Theta V : IMQ :: \Theta V . VI : MQ . QI :: CX : \Theta V :: CL : \Theta\Xi = ZP$; poichè sono gli archi $Y\Theta$, $Y\Phi$, $C\Phi$ respettivamente in M, Θ, e Ω bisecati.

CO-

COROLLARIO IV.

S' è udito più volte da taluni spacciarsi come luminosissima e naturalissima deduzione dell' equilibrio nel Vette dalla sola Bilancia *semplice*, indipendentemente da ogni *raggiata*, il seguente discorso. Sia AIB (Fig.ª 43.) una *Libra* di braccia eguali col fulcro in I, sollecitata in A dalla forza F alla medesima perpendicolare ed in B da un' altra *Libra* SBC, pari di lunghezza alla prima, aggravata ne' suoi estremi S, C di due forze ad essa normali e paralelle alla rammentata $\frac{F}{2}$, $\frac{F}{2}$, la cui *risultante* in B suo ipomoclio è F, e snodata in B sì che possa rivolgersi a piacimento attorno di questo punto, in un piano però perpendicolare alla direzione comune di tutte le forze suddette. Dopo tal posizione di fatto chi non vede (soggiungono), che conservandosi l' equilibrio in qualsisia situazione delle due *Libre* Archimedee così unite AIB, SBC, debba eziandio mantenersi lo stesso quando nell' ultimo limite si dispongano entrambe (salvo tutto il rimanente) nella medesima dirittura AIBP; di modo che cambiato il sistema delle due *Libre* nella Leva diritta AIP a braccia diseguali, uno doppio dell' altro, e la forza $\frac{F}{2}$ posta in S restando fuori d'azione, perchè elisa o sorretta dal fulcro I, abbiasi palpabilmente e senza *mistero* F in A equilibrata con $\frac{F}{2}$ in P, sendo i bracci $\overline{AI}$, $IP = 2AI$ in ragion reciproca delle forze? Può ancora estendersi il ragionamento medesimo ad altri men semplici casi dell'equilibrio: conciossiachè, seguitando le medesime traccie, quando fingasi in B la Leva TBD (già provata) col braccio $BT = BI$ e $BD = 2BT$, colla forza in T eguale a $\frac{2F}{3}$, in D eguale a $\frac{F}{3}$, e perciò in B eguale a F, ed in equilibrio con F in A, e quindi rivolgendo la Leva, il punto T cada in I e D in R, conseguiremmo la prova dell' equilibrio nel Vette AIR, ferme stanti tutte le altre condizioni premesse, dove l'estremo A è caricato di F, R di $\frac{F}{3}$, e viceversa IR : IA in ragion tripla. E se MBO fosse un' altra Leva, ch' avesse il braccio $MB = BI$, il braccio $BO = \frac{BI}{2}$, in M la forza $\frac{F}{3}$, in O la forza $\frac{2F}{3}$, e per conseguente F in B, parimente in tal caso, condotti i due punti M in I, O in N, e mantenuto tutto il restante premesso, verrebbe ad essere equilibrata la Leva AIN, nella quale $F : \frac{2F}{3} :: 3F : 2F :: 3 : 2 :: IN : IA$. In somma con questo mezzo e partendosi a grado a grado dai casi di già dimostrati, si compirebbe la prova dell' equilibrio nel Vette per tutte le supposizioni possibili del rapporto numerico fra i suoi due bracci, contemplate nella Parte I. del Teorema precorso, fuori della necessità d'impiegare in niun conto all' istesso proposito le Bilancie *asteroidi*. Contuttocciò pecca sostanzialmente, a mio credere, sì fatta maniera di dimostrare; non solo perchè presuppone per vero, senz' averlo prima con evidenza provato (vedasi il Corol. VI. del Lemma), che il fulcro B e nella *Libra* SBC e massimamente nei Vetti TBD, MBO, ec., sopporti un carico eguale alla *somma* delle due forze poste agli estremi, ma molto più pel motivo che cambiansi le circostanze intrinseche dell' efficacia ed azion delle forze subito che piena essendo quando son libere e sciolte, e la *Libra* ed i Vetti stanno nei punti S, T, M, ec., una parte di loro si perde nel fulcro I, vinta ed eliminata dalla di lui resistenza, nè ha più campo d' agire liberamente come in passato: laonde egli è conceduto di dubitare della legittimità della conseguenza. —

Odorano dell' istesso difetto le dimostrazioni rammentate da Descartes come dedotte dalla troclea mobile, secondochè apparisce da più luoghi delle sue *Epistole*, e quelle d' Hee e di Parent sopra tutto, ove suppongono nelle Puleggie e nella Bilancia, egualmente, che gli Scrittori più antichi della Meccanica (Scolio dell' Assioma al §. *Finalmente*), evidentissimo lo spartimento del peso situato nel centro della Troclea o nel mezzo d' una *Libra* in due precise metà sopra entrambi gli estremi. Nè tuttavia è da negarsi, che all' ultimo specialmente non debba la Statica dei rispettabili avanzamenti, come quello che sebbene rassembri applaudirsi d'aver data una nuova prova dell'equilibrio nel Vette, adoperando a questo effetto l' eguaglianza de' *momenti* delle forze da una parte e dall' altra dell' ipomoclio, ha perciò presupposto quanto appunto facea prima d' uopo accertare, non lascia d' avere il merito almeno d' essersi per suo mezzo aperta e spianata la strada alla ricerca delle *condizioni* dell' equilibrio in ogni Corpo *rigido*, o libero affatto o in parte vincolato, sì pel riflesso della rotazione, che pel diverso di traslazione (separati acconciamente e tenuti divisi fin da Fromond, contraditttore acerrimo dei principj sommi della Scienza dell'equilibrio e del moto e della Matematica in generale), e l' altro d' aver prevenuta l' idea ingegnosa d' Hamilton e di Monge, che più forze paralelle in qualunque numero distribuite a distanze eguali su d' una verga inflessibile valgono appunto quanto la loro *somma* nel mezzo; d' onde derivasi poi, quasi col medesimo metodo d' Archimede, la fondamentale proprietà della Leva sollecitata da forze, tutte della medesima direzione, e ad essa Leva normali. Per quante diligenti e premurose ricerche abbia fatte in tutta Italia della Memoria di S. Vince intorno alla *Leva*, che come accenna Millin (pag. 291. del T. I. *Magazin Encyclopédique*) è inserita nella Parte I. Num. V. del Volume per l' anno M. DCC. XCIV. delle *Transazioni filosofiche* della R. Società di Londra, non essendomi riescito di leggerla la e darne contezza com' io vivamente bramava, indarno n' avanzerei congetture sul proposito particolarmente di assicurare, se il metodo recentissimo usato da questo Geometra Inglese fosse lo stesso di quello della *forza diffusiva* considerata da Monge onde argomentare dalla Bilancia la Leva, o se in qualche parte il divisato ritrovamento s' incontrasse coi mei pensieri meramente *geometrici*. (*)

COROLLARIO V.

Non dee tralasciarsi una conseguenza, che illumina molto l' antecedente teoria, preparando frattanto il cammino verso la più difficile degli *appoggi*, non meno che delle forze *composte* (riscontrisi il Lemma del II. Art.); ed è che l' equi-

---

(*) Dopo terminato il presente Ragionamento ho avuta sott' occhio fedelmente trascritta con umanità singolare da un Professore nel Liceo di Brera la *Memoria* di Vince, di cui dava cenno nel Corollario IV. del Teorema dell' Articolo I. Nè solamente m' è occorso trovare nella lettura della medesima, che l' Autore concorre meco (pp. 35. 36.) in proposito della necessità di distinguere nell' equilibrio due conati al moto, cioè al *rotatorio* e al *progressivo*, ma (pp. 36. 37.) oltrediciò nell' assumere come Principio unico della Statica l' *identità* o *simetria*. Incompleta è nientedimeno a parer mio la sua prova; 1. poichè presuppone *per evidente*, che le estremità d' una verga di Bilancia *semplice* sian caricate della metà d' un Peso, che risieda nel mezzo, o della metà del totale di due pesi eguali ed egualmente distanti dal mezzo ed estremi; 2. perchè nell' applicare, in rettificazione della prova d' Archimede, questo suo discorso alla Leva, ne cambia sostanzialmente le circostanze e le *condizioni* col porre (pag. 38.) il fulcro non più, sull' esempio di sopra, all' estremo della Bilancia, ma framezzo ai due estremi: lo che dà luogo a nuova dubbiezza combinando, siccome egli fa, in una *Leva* sola due *Libre*, piuttosto che derivare, come facc' io, da una *Libra* sola la *Leva*.

l' equilibrio sussiste in una Bilancia *asteroide* anco non regolare , ma però simetrica nel modo che vado ad esporre . Se per esempio (Fig. 44.), ferme stanti le tre forze F eguali e normali al piano dell' *Asteroide trifida* AIBC, che la sollecitino nei tre punti estremi de'raggi A, B, C, due di essi IB, IC crescano o scemino egualmente i rispettivi angoli centrali per rapporto a ID , e s'allunghino o scorcino quanto importano le *secanti* de' nuovi angoli o in ragione inversa de'loro *coseni*, tutte queste innumerevoli *Asteroidi* simetriche $AIB'C'$, $AIB''C''$, $AIB'''C'''$, ec., $AI_{,}B_{,}C$, $AI_{,,}B_{,,}C$, $AI_{,,,}B_{,,,}C$, ec., le quali in figura d'ala o *ventaglio* hanno per limite da una parte la Leva diritta AID e dall'opposta due raggi infiniti $I_{\infty}B$, $I_{\infty}C$, purchè non rigorosamente paralelli (contra il solito immaginare d'alcuni Geometri, che gli prendono sempre per equidistanti senza distinzione di casi, mancando d' attendere alle condizioni particolari del Teorema o Problema, cui spettino), daranno altrettanti equipondj, aventi in I l' ipomoclio comune. La ragione è chiarissima : perocchè in virtù del premesso principio d' *identità*, oltre di non potervi essere rotazione a motivo del *contranniso* intorno AID , la *risultante* d' ogni binario di forze F, F, che facciano eguali angoli con AID, dovendo cader sopra ID, e pel Numero 5. del Corollario IV. e pel Corollario VI. del Lemma la *risultante* medesima operando in D come se quivi fosse 2F, siegue appunto l' istesso come nella regolare *Asteroide*, cioè d' aversi una Leva diritta d'un raggio doppio dell'altro. Ed ecco un Modello di Bilancie quante mai si vogliano a tre raggi , dove come nella *semplice* Archimedea , l'equilibrio è indipendente affatto dalla lunghezza dei tre raggi medesimi (Coroll. I. e V. del Lemma), purchè si salvi la *simetria* nella loro disposizione ; giacchè ve ne son sempre due maggiori o minori di AI, ma eguali infra loro ad AI egualmente inclinati, le lunghezze dei quali procedono colla legge delle *secanti* d' un Quadrante di Circolo , ed hanno perciò (in seguito del Teorema Bernoulliano , che agguaglia le *secanti* alle *somme* delle *tangenti* degli archi e di quelle delle metà dei lor complementi) un'analogia alle lunghezze contate dall' imo punto della Catenaria semplice, che procedono colla legge delle *tangenti*. Fermo stante l' equilibrio, ipomoclio, e tutte restando eguali infra loro le forze, son suscettibili degli innumerevoli cambiamenti medesimi ancora in genere le *Asteroidi* o imparilatere o parilatere qualora esse siano simetriche, e non si disturbino ma rimangan gli istessi i punti medj dei *binarj* delle singole forze appajatte ed a foggia di giogli (Ζυγὸι) infilate in un asse comune, senz' attendere per conto alcuno alla misura dei raggi. Così le Figure 45. e 46. rappresentano delle *Asteroidi* simetriche pentagone ed esagone IAH'K'L'M', IAH''K''L''M'', ec. IAH'K'CL'M', IAH''K''CL''M'', ec. (valendo l' istesso discorso rispetto a tutte le altre multiraggiate o polifide), comunque spurj rastremati, o eccedenti a confronto del regolare AHKLM, AHKCLM, ec. siano i Poligoni derivati AH K'L'M', AH''K''L''M'', ec., AH'K'CL'M', AH''K''CL''M'', ec., i quali nascono congiungendo gli estremi de' raggi, per quanto possano le loro Figure essere sghembe, irregolari, bizzarre, e com'è facile immaginare a chi sia pratico delle *trasformazioni* geometriche, anco menomate d' un lato o due lati, intrecciate, caudate, e miste d' angoli rientranti e salienti. Nè v' è bisogno, a fine di delinearle, d' altro artificio, se non che di mantenere sulle paralelle DE, FG, ec. gli estremi de' raggi appajati, ed inclinarli egualmente ogni pajo all' asse o linea media AIC, perchè conservisi l'equilibrio sul fulcro I, e non siavi luogo veruno a rotazione o sbilancio mercè dell' *euritmia* o simetria delle nuove conformazioni, che finalmente si risolvono tutte in una Leva diritta *composta*, e seguono colle rispettive lunghezze per ciascuna coppia di raggi quella medesima regola delle *secanti*, che nell' *Asteroide trifida* abbiamo già contemplata e definita di sopra. Non potrebbe tampoco con ragione appropriarsi alle *Asteroidi* derivate quella simiglianza ch' esprime il Poeta „ *Facies non omnibus una — Nec diversa tamen, qualem decet esse sororum* „. Imperciocchè non solo le Figure simetriche , quali sarebbero quelle foggiate in modo di Croci, di Curve a semplice curvatura rientranti in se stesse , o aperte, troncate, ec. , aventi però la linea media per asse (Figg. 47. 48. 49. 50.) sollecitate nelle cime di tutti gli angoli o nei loro lembi da forze eguali e perpendicolari al piano delle medesime, per la cagione istessa partecipano della proprietà divisata o sivvero dell' equilibrio , posate che siano sul punto I come centro de' *momenti* o delle *medie distanze* del Vette *composto* AIC, rappresentativo in ultima analisi di tutte insieme le forze per via di gioghi accopiate, ma quello ch' è più , si verifica l' equilibrio medesimo anco nei Sistemi o Figure a contrassenso o subcontrariamente simetriche e non *euritmiche;* quali sarebbero, per esempio, la *Pseudo-asteroide* 51. avvertita eziandio sagacemente da Monge (d' onde nascono i Paralellogrammi obliquangoli e quei Poligoni dai Geometri strettamente detti *simetrici*), la 52., la 53., ed infinite altre consimili situate nell' istesso piano, il centro delle quali fosse I e ad un tempo ipomoclio . Difatti abbenchè in questi casi per rendersi ragione dell' equilibrio delle forze eguali sollecitanti gli estremi de' raggi o distribuite sugli orli di quelle Curve o rettilinee Figure perpendicolarmente ai lor piani , non si potesse quì rimontare alle vere regolari *Asteroidi* , di cui le passate combinazioni son figlie, ora più ora meno travisate ed occulte, e sono in certa maniera calcate sul medesimo *tipo*, contuttociò eglino mostrano ad evidenza non esser altro che complessi riuniti in I comun centro , punto di bisezione , fulcro o ipomoclio, di quante mai si vogliano Bilancie *semplici* d' Archimede disposte in fascj a doppio *ventaglio* , che separate e perciò eziandio cumulate debbono equilibrarsi infra loro . E siami permesso a questo proposito d' accennare , che ben a ragione gli antichi denominassero *Juga* Bilancie sì fatte, prendendone il primo modello dall'appajamento de' Bovi aratori, e tutte le simili congiunzioni , o scempie come i *Conjugi* , le *Sizigie* , i Mesi *sizigi*, la *Libra* celeste, le due vecchie *Chele* della costellazione dello Scorpione, la Lira, ec., o *polijughe* o *polizighe* come i Banchi de' rematori, le Manovelle dei porta-pesi o *falangarj*, le metaforizzassero qual esempio d' equipondio e concordia, ed all' incontro riservassero l' epiteto d' *azighe* a tutte le innumerevoli e varie rimanenti distribuzioni, che non ammettano parità di carico, concorso eguale d' azione, naturale, primitivo ed evidente equilibrio.

COROLLARIO VI.

Ho già detto superiormente in più luoghi (e massime in calce dello Scolio dell' Assioma e nei Corollarj VI. VII. e VIII. del Lemma), che la ricerca del carico degli *appoggi* riconosce gli stessi fondamenti e principj della Statica universale. Tranne però le *somme* supposte delle pressioni de' pesi sul fulcro delle Bilancie e dei Vetti diritti e la distribuzione eguale delle forze ne' cordoni paralelli delle Troclee e dei Polispasti, più sentita che dimostrata dagli Antichi e da Galileo (Scolio c., Coroll. VI. e VII. precedenti), Euler seniore fu il primo degli Analisti moderni ad occuparsi di questa Teoria; e dopo di lui poco v' aggiunsero Dalembert e Bossut. Gli Atti della nostra *Società Italiana delle Scienze* hanno il pregio ben meritato d'aver molto illustrata cotanto oscura e spinosa provincia della Meccanica. Lontano da sciogliere generalmente il Problema (lo che sarebbe ancora contrario al piano dell' argomento elementare propostomi, ben diverso da quello affatto didascalico incominciato da Salimbeni), non farò che affacciare ai Geometri alcune brevissime osservazioni. Primieramente pare indubitato (come in generale asserisce Delanges), che se gli *appoggi*, di qualunque numero, siano de' punti collocati in un medesimo piano normale alla direzione dell' unica forza, la quale agisca nel *centro delle medie distanze* del Sistema dei punti accennati, ognuno degli *appoggi* suddetti (fossero ancora infiniti e componessero un orlo o lembo continuato) sostenga l'istesso carico o pressione, equivalente al *submultiplo* della forza *denominato* dal numero degli *appoggi* indicati. Risalendo ai secoli più rimoti troviamo, che questa verità fu sentita per esperienza dagli Abitatori Orientali fin dalla prima nascita della Statica; comprovandolo tanto ciò che si legge nel Corollario VII. (Fig. 26.) rammentato in proposito de' Chinesi (i quali forse l' ebber dai Tártari o dagli Indiani insieme coll' artificio di muover la *Sedia gestatoria* da loro stessi senz' ajuto di forza esteriore), quanto quello che lasciò scritto Aristotele, e dietro di lui Vitruvio, Afranio, Grandi, Varignon, e molti altri, sull' antica pratica delle *Falanghe* o del portar pesi sugli omeri per via di stanghe o di vetti. E questa eguale distribuzione o diffusione della forza dipendendo nel caso, di cui si tratta, dal principio della Bilancia e della Leva, o semplice o ripetuta, che vuol dire dall' Assioma unico dell' *Asteroide* o *Libra* raggiata, o sivvero dal fondamento d'*identità* (che nella soggetta materia è piaciuto eziandio d' introdurre a Malfatti), come risulta dai miei riflessi testè citati, non bisogna abbandonar di leggieri sì fatta Regola classica mentre la forza non essendo più situata in quel centro, il Problema maneggiato con altri modi venga a manifestarsi *indeterminato*. Tanto maggiormente perchè riportati ai principj ordinarj della Leva i casi particolari di tre *appoggi* in Triangolo e di quattro in Romboide, coincidon con quelli le risultanze di quasi tutti i differenti metodi per risolverli. Difatti Bossut ha dimostrato (nè saprei farlo con più semplicità ed eleganza) quello che Euler provò dopo molti calcoli appoggiati sopra un' ipotesi fisica, cioè, che stando ai principj soliti delle Leve (sebbene immaginate e non realmente esistenti) i tre *appoggi* A, B, C si spartiscono la forza unica I di tal maniera, che la rata o tangente della pressione a ciascheduno di loro spettante venga rappresentata dalle *aree* dei tre Triangoli parziali BIC, AIC, AIB, rappresentando l' *area* del Triangolo intero BAC tutta la forza premente, la quale (soggiungo, avendolo omesso l' Autore) portata in O *centro delle medie distanze* sì del Triangolo stesso BAC, come dei tre punti isolati B, A, C per gli *Elementi* di Geometria, non può a meno di non distribuirsi in terzo con eguaglianza sopra gli *appoggi* medesimi, a motivo dell' egualità dei Triangoli, pari ciascuno ad un terzo del totale; conforme d' un' *Asteroide trifida* equicrure (Corol. V. precedente, Fig. 44.) ho di già stabilito sul fondamento solo della Bilancia *semplice* Archimedea. Così qualora le espressioni Euleriane dei carichi de' quattro appoggi in Romboide, A, B, C, D, essendo la forza premente in I, cioè $\frac{F}{4}\left(\frac{2BP}{BA}+\frac{2DQ}{DA}-1\right)$, $\frac{F}{4}\left(\frac{2AP}{AB}+\frac{2CS}{CB}-1\right)$, $\frac{F}{4}\left(\frac{2BS}{BC}+\frac{2DR}{CD}-1\right)$, $\frac{F}{4}\left(\frac{2CR}{CD}+\frac{2AQ}{AD}-1\right)$ si trasportino al particolare di O, *centro* com' ognun sa *delle medie distanze* tanto del Paralellogrammo, quanto del Sistema dei quattro punti o vertici sciolti A, B, C, D, desse si cambiano tutte in $\frac{F}{4}\left(2.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}-1\right)=\frac{F}{4}\left(1+1-1\right)$ $=\frac{F}{4}$, non diversamente dal fissato di sopra coll' unica traccia della Bilancia: imperocchè questo è uno degl' innumerabili casi compresi nella *Pseudo-asteroide* della Figura 51., ossia della 26. riconcentrata, o della *Falangaria* o *Tollenone* Cinese descrittoci dal Casati come in assai meno di spazio convenevolmente aggruppato. Nè differiscono per i tre *appoggi* da quelle d' Euler le formule somministrate da Lorgna, come quelle (Fig. 56.) che derivate ancor esse dal Vette immaginato BPQ e dall' altro AQC, stando in P la forza sollecitante F, si risolvono nell' esprimere le tre pressioni in A, B, C col mezzo di $F.\frac{PE}{AD}$, $F.\frac{PG}{BH}$, $F.\frac{PL}{CK}$; poichè siccome le rette impiegatevi son perpendicolari ai tre lati del Triangolo ABC, è facile di permutarle in $F.\frac{PE}{AD}\left(\frac{BC.AD}{BC.AD}\right)$, $F.\frac{PG}{BH}\left(\frac{AC.BH}{AC.BH}\right)$ $F.\frac{PL}{CK}\left(\frac{AB.CK}{AB.CK}\right)$, e vale a dire $F\left(\frac{PE.BC}{BC.AD}\right)$, $F\left(\frac{PG.AC}{AC.BH}\right)$, $F\left(\frac{PL.AB}{AB.CK}\right)$, cioè $F.\frac{\Delta(BPC)}{\Delta(ABC)}$, $F.\frac{\Delta(APC)}{\Delta(ABC)}$, $F.\frac{\Delta(APB)}{\Delta(ABC)}$ coerentemente al detto di sopra. Oltredichè in tutte le disposizioni (infinite nelle lor *varietà*) di più che quattro ed anco innumerevoli *appoggi* simetrici, a norma delle Figure segnate dalla 45. in poi sino alla 53. inclusivamente, adoperando i Polispasti e la Libra *semplice* o il caposaldo di tutta la Statica, abbiam veduto di già in virtù del Corollario precorso, che si propaga egualmente e si repartisce su ciascun punto d' *appoggio* la forza F, che agisca nel *centro* I *delle medie distanze* del Sistema de' punti medesimi: il che va d' accordo non solamente colla Teoria (tutta *Statica* pel Corollario VI. del Lemma) della comunicazione eguale delle forze *centriche* ai punti singoli d' un Sistema *passivo*, e ciò che non manca di recar maraviglia, anco coi ritrovamenti dell' Euler, abbenchè dedotti dalla sua ipotesi vaga, quando parla delle *aree* triangolari, rettangole, circolari, ec., in qualità d' *appoggi* continuati. — Se dunque (in secondo luogo) i triti e notissimi canoni della Scienza dell' equilibrio somministrano in materia degli *appoggi* tanti casi univocamente *determinati*; se i *momenti* di rotazione adoperati da Delanges e Paoli non sono in sostanza ancor essi che considerazioni di Vetti; se indipendentemente eziandio dall' impiego delle velocità *virtuali* $\delta z, \delta u$; l' equazioni notissime dell' equilibrio, più geometriche che meccaniche, come hanno mostrato Bossut, Monge, Carnot e parecchi altri Analisti, averebbero addirittura condotto alle medesime conseguenze rilevate in proposito della mancanza di *condizioni* per *determinare* il carico degli *appoggi*, qualora sian più di tre non po-

posti in diritto o di due in retta linea; e se finalmente anche le forze *eccentriche* (vedansi Coroll. V. e VI. del Lemma) si comunicano con eguaglianza a tutti i punti d'un Sistema ogni volta che non sia questo capace di concepire alcun moto di rotazione; fa di mestieri non introdur mai delle ipotesi, che stiano in contradizione coi principj stabili suddivisati. Questi sono 1. che la *somma* delle pressioni di tutti insieme gli *appoggi* equivalga precisamente alla forza unica da sostenersi; 2. che rimanga ad un tempo eliminata e distrutta ogni *tendenza* del Sistema alla rotazione; 3. che dal *centro delle medie distanze* d' un Sistema qualunque di punti si propaghi sopra i medesimi con eguale scompartimento la forza che in esse risieda, come in sequela delle primarie leggi dell' equilibrio determina la Dinamica. Così il Problema degli *appoggi*, che fin dall' età di Varignon si cominciò a valutare con tutta ragione come un Problema d' equilibrio di più forze paralelle, e *reattive* in direzione contraria diametralmente a quella delle pressioni, poserà su fondamento inconcusso; così i due differenti *nisi* ai movimenti di traslazione e rotatorio si vedranno entrambi, come pur debbono, decisivamente annientati e produrranno il *vero* riposo; così conseguiremo alla fine un criterio sicuro per separare le false od assurde dalle ammissibili supposizioni. — Ora egli è certo (o tal mi rassembra) che la maniera ideata da Lorgna de' due Sistemi *attivo* ed *inoperante* d' ogni ternario d' *appoggi* sia inammissibile per la falsità del principio, da cui si parte, quale si è quello che gli *appoggi* medesimi tutti insieme sostengano una forza maggiore della premente, che poi con un' *ipotetica* regola di proporzione debba ridursi alla rigorosa eguaglianza. Ella fu dunque saviamente dall' Autore avanzata col modesto titolo di *tentativo*. Ha coll' istessa esemplare modestia annunziato il suo piano Malfatti: ma questo ancora, avvegnachè non sia redarguibile a mio parere per l'uso, che vi si fa, o di tale o tal altro Vette, ora *primario*, ora *concorrente*, sebben non reali (poichè, torno a di-

dire, parimente gli assi di rotazione son Vetti arbitrarj con altri Vetti infilativi), sembra peccar come dipendente da un' analogia non abbastanza provata, e più pel motivo ch' esso repugna al terzo dei rammentati principj. Difatti per rapporto al Romboide (Fig. 55.) come ancora rispetto al Rombo (Fig. 57.) situata la forza in O *centro delle medie distanze* dei quattro punti A, B, C, D, siegue dalle formule dell' Autore, che gli *appoggi* B, D sopportino tanto più di pressione degli altri due A, C, quanto a proporzione è più corta la diagonale BD a paragone dell' altra AC; d' onde ne risulterebbe, a mio sentimento, l' inconveniente, che la forza posta in O punto medio della Libra MN e propagatasi metà in M, metà in N, non si comunicasse poi per metà di quei punti parimenti *centrali* agli estremi delle altre due Libre AD, BC in contradizione col principio intuitivo, su cui si sostiene, come abbiam visto (Corol. II. e Num. 2. dello Scolio dell' Assioma), tutta intera la Teoria della Statica e dell' Idrostatica. La Bilancia o il complesso di due o più Bilancie concentriche (e tali sono le combinate AOC, DOB) per la distribuzione delle forze *centrali* a' suoi estremi, come viceversa per la comunicazione di quelle degli estremi al suo centro, non attende alla varia lunghezza delle sue braccia; e Fermat ripose quest' Assioma tra i suoi principj *geostatici* (Coroll. I. III. IV. e massime il V. ed il VI. VII. e VIII. del Lemma). Mentre ciò potesse mai esser dubbioso, non si verificherebbe l' equilibrio altrimenti con tre forze eguali nell' *Asteroide trifida* della Figura 44. di due braccia pari infra loro e comunque diseguali rispetto al terzo; nè tampoco sussisterebbe nella Bilancia *trifida* irregolare quanto agli angoli ed ai suoi raggi AO, BO, CO, della Figura 54., tostochè O sia il *centro delle medie grandezze* rispetto ai tre punti A, B, C, e si suddivida in tre parti eguali sopra gli *appoggi* la forza *centrale*, ch' è pure uno dei casi non solamente accordato da Malfatti, ma sopra il generico fondamento del quale egli stabilisce per via di *funzioni analoghe* la sua nuova elaborata Teoria. Considerato all' opposto il *Bomisco* (Fig. 58.), nasce dalle espressioni di Malfatti la conseguenza, che qualora la forza premente dal punto P del suo asse QO si trasferisca al punto di mezzo I, ch' è *centro delle medie distanze* dei quattro punti d' *appoggio* A,E,F,C, ciascuno degli *appoggi* medesimi sopporti il quarto della forza *centrale* (come debb' essere pe' miei principj, risolvendosi l' equilibrio nella Libra OIQ combinata colle altre due AOC, EQF) : perocchè le pressioni in A, E, egualmente che in C,F, sono proporzionali secondo lui ad IE.Cos.EIQ, IA.Cos.AIO, ossia, pel motivo d'essere le *secanti* in ragion reciproca de'*coseni*, eguali infra loro; e ciò malgrado la differente lunghezza dei raggi IA, IE, che lo ha portato a resultanza tutta diversa nel Romboide e nel Rombo. La dimostrazione generale del nostro precedente Teorema, affidata a sole Libre facienti angoli ora retti ora obbliqui con altre Libre cumulate colle prime, che pur ci ha condotto direttamente a stabilire con evidenza la Teoria della Leva per mezzo dei Poligoni regolari, manifesta ad un tempo quanto incerto egli sia il cammino *retrogrado* per via di Vetti, aperto in sequela della nuda analogia col Triangolo, siccome Paoli è d' avviso. Niente dirò della Dottrina dell' Euler, come quella che lui stesso asserisce inapplicabile affatto alla pratica, e ch' è vittoriosamente provata insussistente da Paoli, e scevra d' incongruenze nel caso unico dei tre *appoggi* in Triangolo, perchè allora soltanto l' *arbitraria* ipotesi assunta non osta alle regole inalterabili dell' equilibrio. Delanges, cui non può togliersi il merito d' avere il primo in Italia *tentato* d' illuminare quest' oscuro ed astruso Problema, e d' aver mostrato avanti di tutti, che la ricerca è l' istessa sì per gli *appoggi* orizzontali che pei disposti in piano inclinato, quando sia o venga resa perpendicolare al medesimo la forza premente com' esige per necessità l' equilibrio, son persuaso che oggi convenga, giusta i rilievi esatti di Paoli, 1. che il Problema, del quale si tratta, altro non sia che un' equilibrazione di forze; 2. che in conto di queste forze debbano annoverarsi le *reazioni* degli *appoggi*, da esso concesse in principio e dipoi ritrattate; 3. che due soli assi di rotazione s' abbiano da contemplare a piacimento in un Piano per l' egualità dei *momenti*, poichè introducendone altri, l' *equazioni* nuove che si ottenessero per satisfare alle *condizioni* dell' equilibrio, non sarebbero *indipendenti* ma *identiche* colle prime, siccom'è teoria già fissata, non che dalla Statica, dalla Geometria *elementare*. — Ma veramente non havvi egli mezzo di risolvere questo Problema difficultoso relativo agli *appoggi* senz' analogia di *funzioni*, salve tutte le Regole della Statica, e d' averne sempre una soluzione *determinata?* Io sono andato meco medesimo divisando, che potrebbe pur essere infra i tanti possibili il modo *speciale* di distribuire una forza sopra gli *appoggi*, che si realizzi in Natura, quello di cui vado a darne brevissimo saggio. Siano quanti mai si vogliano *appoggi* (Fig. 59.) A, B, C, D, E, ec., la forza F premente in I, ed O *centro* solito *delle medie distanze* dei punti dati. Congiungasi I con O mediante la retta IO, e questa si prolunghi dalla parte opposta a quella del *centro* suddetto, rapporto ad I, fino all' incontro in M col lato DC, o col vertice dell' angolo C quando occorra. Spartita la forza premente come porta la Leva OIM in due forze parziali, una $F.\frac{MI}{MO}$ che agisca in O, l' altra $F.\frac{OI}{MO}$ che solleciti in M la Leva CD, o il punto solo C, la prima si suddivide *egualmente* pei principj premessi su tutti gli *appoggi* assegnati; mentre la seconda o preme unicamente C o si repartisce tra C e D, a motivo della frapposta Leva CMD, in due giunte di nuove forze, cioè quanto a C espressa da $F.\frac{OI}{MO}.\frac{DM}{DC}$, e per D da $F.\frac{OI}{MO}.\frac{CM}{DC}$; nel qual reparto di forze ognun vede, che se gli appoggi A, B C, D, E, ec. sono *n* di numero, ciascheduno di loro (meno i due C, D

C,D) sopporterà la pressione $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO}$, i rimanenti C,D respettivamente $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO} + F . \frac{OI}{MO} \cdot \frac{DM}{DC}$, $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO} + F . \frac{OI}{MO} \cdot \frac{CM}{DC}$, salvandosi insieme tutte e tre le soprenunciate fondamentali Regole dell'equilibrio. E nel caso che M cada in C, questo unico *appoggio* soffrirà il carico equivalente a $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO} + F . \frac{OI}{MO} = F\left(\frac{MI + n.OI}{n.MO}\right)$, e tutti gli altri a $F\left(\frac{MI}{n.MO}\right)$ per ciascuno. A fine di comprovare l' idoneità del supposto giova di confrontarlo col caso notissimo dei tre *appoggi* (Fig. 60.), tenute ferme per maggior chiarezza e compendio di frase le medesime lettere indicatrici. La pressione adunque in B viene rappresentata da $\frac{F}{3} \cdot \frac{IM}{MO}$, in A o D da $\frac{F}{3} \cdot \frac{IM}{MO} + F . \frac{OI}{MO} \cdot \frac{CM}{DC}$, in C da $\frac{F}{3} \cdot \frac{IM}{MO} + F . \frac{OI}{MO} \cdot \frac{DM}{MC}$; che vale a dire frattanto la pressione in B a quella in A come $1 : 1 + 3 . \frac{OI}{IM} \cdot \frac{CM}{AC} :: IM.AC : IM.AC + 3.OI.CM :: \triangle AIC : \triangle AIC + 3 \triangle OIC$ per gli *Elementi* geometrici. Ma $3 \triangle OIC = 2 \triangle NIC$ perchè $CN : CO :: 3 : 2$, a motivo che O è *centro delle medie distanze*; e $2 \triangle NIC : \triangle IAC :: 2NS : SA$: e perciò $\triangle AIC : \triangle AIC + 2 \triangle NIC :: SA : SA + 2SN = BS$, poichè N in virtù del *centro* O divide AB per metà: dunque $\triangle AIC : \triangle AIC + 2 \triangle NIC :: \triangle AIC : \triangle BIC$, che vale a dire $\triangle AIC + 2 \triangle NIC = \triangle BIC$, ed in conseguenza pressione in B a pressione in A come $\triangle AIC$ a $\triangle BIC$; potendosi l'istessa dimostrazione adattare anco al terzo punto C, sebbene venga subito per deduzione immediata ad essere rappresentabile la da lui sofferta pressione dal rimanente $\triangle AIB$, e d'altronde si sappia ch'essendo $3 \triangle AIC + 3 \triangle OIC + 3 \triangle OIA = \triangle AIC + \triangle BIC + \triangle AIB$, ed avendo provato $\triangle AIC + 3\triangle OIC = \triangle BIC$, ne deriva altresì $\triangle AIC + \triangle OIA = \triangle AIB$, Teorema vaghissimo di Geometria. Ecco pertanto verificato quel caso, che volentieri si presta a tutti i metodi sin quì adoperati dagli Analisti, e da cui si rileva per Corollario che se il punto I, dove agisce la forza premente, trasportisi in M sopra un lato qualunque DC, l' appoggio B viene ad essere liberato dal carico, e se lo dividono tutto i due *appoggi* C, A nella ragione inversa di CM : MA, che sono i due bracci della Leva interposta. Conseguentemente a ciò inclino a credere con Galileo, dov' esamina l' accidente della rottura d' una Colonna sdrajata, e con Malfatti e Delanges, che l' economia della Natura *determini* in modo le pressioni sopra più *appoggi* situati nella medesima direzione da caricarne soltanto quei due, tra i quali è *immediatamente* la forza premente, quando non sia cedevole nessuno di loro; laonde non abbiavi luogo per questo particolare di ricorrere a qualche altro principio ignoto di Statica, come sospettò Dalembert sì nel presente che in altro Quesito meccanico, forse oggimai risoluto da Meunier e a mio parere di facile scioglimento. Paragoniamo piuttosto alla supposizione premessa il *Bomisco* (Fig. 58.) per riscontrarne le conseguenze; poichè queste sarebbero le medesime scegliendo in esempio un Rettangolo ed anco un Romboide. Mentre pongasi *eccentrica* in un punto qualunque P del suo asse QO la forza premente, stando nel di lui mezzo I il *centro delle medie distanze*, o grandezze dei quattro *appoggi* A, E, F, C, ognuno di questi soffrirà la pressione in commune $\frac{F}{4} \cdot \frac{OP}{IO}$, ed i due A, C anco la giunta per ciascheduno di $\frac{F}{2} \cdot \frac{IP}{IO}$; che però, indicate le pressioni respettive colle lettere caratteristiche degli *appoggi* medesimi, sarà $E + F : A + C :: \frac{F}{2} \cdot \frac{OP}{IO} : \frac{F}{2} \cdot \frac{OP}{IO} + F \cdot \frac{IP}{IO} :: OP : OP + 2IP :: OP : PQ$; siccome difatti debb' essere, atteso che l' equilibrio in sostanza consiste nella Leva QPO caricata delle due *Libre* EQF, AOC ad entrambi gli estremi. Finalmente tentiamo un altro confronto, supponendo gli *appoggi* di qualsisia numero impari n (Fig. 61.), ma situati in contorno di Poligono regolare; e sia fuori del *centro* O *delle medie grandezze* di tutti gli *appoggi* medesimi collocata in I sul *cateto* OM la forza premente. In vigore della divisata distribuzione le pressioni comuni a tutti i punti A, B, C, D, E, F, G, ec., s' esprimono mediante $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO}$, ed a quelle solamente di D, E conviene aggiungere per ciascheduna $\frac{F}{2} \cdot \frac{OI}{MO}$. Dunque il Sistema delli $n-2$ punti d' *appoggi* C, B, A, G, F, ec., reagirà coi *momenti* $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO}\left(2.IL + 2.IN \pm 2.\,\text{ec.} + IA\right)$ e i due restanti D, E col *momento* contrario $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO} \cdot 2.MI + \frac{F}{2} \cdot \frac{OI}{MO} \cdot 2.MI$, ossia $\frac{F}{n} \cdot \frac{MI}{MO}\left(2MI + nOI\right)$. Ma pel *centro* O *delle medie distanze* sappiamo che $nOI = 2IL + 2IN \pm 2.\,\text{ec.} + IA - 2MI$. Ne risulta perciò l' eguaglianza voluta dall' equilibrio rapporto ad I sulla Leva *composta* ALNIM, colle Libre BG, CF, ec. e DE collegata. Applicandosi l' istesso giro di prova anco ad *appoggi* disposti in perimetro di regolari Poligoni parilateri, posta la forza premente o sul cateto o sul raggio, chiuderò questo Corollario abbastanza prolisso col dire, che senza pretendere d' aver io solo indovinato il *segreto* della Natura, il mio assunto combina coi fondamenti della Teorica, che ognuno ammette, del rotamento momentaneo de' Corpi *rigidi*, intorno la quale Dalembert, Euler il padre, Segner, Gian-Alberto Euler il figlio, Radicati o di Coconato, Mozzi, ec. s' occuparono con molta lode nel secolo scorso (vedasi il Corol. VI. del Lemma), sublimemente in ultimo sviluppata da Lagrange e Laplace. Nè sa-

sarebbe poi malagevole di far riprova del precedente discorso coll' esperienza, unica guida per riconoscere il *magistero* della Natura (Num. 1. dello Scolio del Lemma), come meditando da qualche tempo sull' argomento esposi in una mia *Prolusione* accademica, rendutasi inutile ed infeconda per mutato destino della mia Patria (l. pocanzi c.): imperocchè quanto a torto mi sembra, che si dovessero attingere dai sperimenti le leggi primitive dell' equilibrio e del moto, siccome lo pensano Dalembert, Carnot, Lagrange e Fourier, d' altrettanto a ragione farebbe mestieri ricavare da Macchine architettate con tutta finezza d' ingegno la decisione di quelli accidenti della Meccanica, che ci tengono ancora perplessi e dubbiosi. Pochi esperimenti d' abili Operatori, e su pochi punti d' *appoggio*, sarebber valevoli a decifrare il *mistero*; ben sapendosi, che le VI. note equazioni di *condizione*, e quelle parimente analitiche delle Superficie curve o di più Piani inclinati condurrebbero facilmente al compimento desiderato della tuttora indecisa Teoria degli *appoggi*.

Scolio.

L' evidenza non dovrebbe aver mai *paradossi*, quando sotto questo nome s' intendano proposizioni contrarie a verità indubitate; e solo si possono di ragione permettere per isfogo di caldo immaginare alle Facoltà che professano d' occuparsi di congetture come i *Paradossi antiquarj* del Minervini. Anco prima delle virili objezioni di Boscovich e di Fontana eran convinti i Geometri, ch' Euler avesse inciampato annunziando l' annullamento *improvviso* d' un corpo portatosi al centro o *foco* d' una Logaritmica - spirale, dopo d' aver percorsa questa Trajettoria speciale mercè d' una forza centripeta sollecitante in ragione inversa de' cubi delle distanze. Tutti rifiutan di credere quello che insinua Fromond, cioè che forze pari e situate perpendicolarmente e nel medesimo piano alle estremità d' una Leva *a squadra* di braccia eguali, vicendevolmente non s' equilibrino. Grandi ha provato (ed è ciò della massima facilità nella Statica) che un' *Imposta* o Valva pesante omogenea rettangolare ODEI (Fig. 62.) sostenuta *a bilico* in O, crescendone verso M, anco all' infinito, o menomandone verso di L comunque l' altezza, ferma sempre stante la sua larghezza, veniva retta costantemente o bilanciata per mezzo di troclee da un Peso eguale posto in H; A, B, C, D, E, ec.; d' onde alcuni han dedotto, che dunque l' istesso Peso *finito* trasportato in O facesse equilibrio colla *linea* OI, e si sono applauditi della scoperta d' un *paradosso*, che non è tale tostochè sappiasi o = o, cioè esservi da una parte nullità di braccio di Leva, e dall' altra annientamento di gravità in una retta rigorosamente geometrica. Altri opinarono, e tra questi Vincenzio Riccati, che il Teorema chiaramente proposto da Pappo (Corol. II. della Prop. passata), checchè Frisi n' apprendesse in contrario, sull' uso del *Centro di gravità* in Geometria, adoperato felicemente prima da Keplero e poi da Guldino e Delafaille, promosso quindi con egual fortuna da Huygens, Leibnitz, Varignon, e Giovanni Bernoulli, ed arricchito alla fine da molti Matematici insigni, che sopravvennero fino a Carnot, il quale pocanzi v'aggiunse fecondità ed eleganza, diventasse fallace e manchevole in certi casi, e massimamente nella ricerca della misura delle superficie de' Corpi *elicoidi;* e da tale contradizione, secondo loro, ne trassero nuovo motivo di *Paradosso*. Essi non viddero, ch'e' facea di mestieri non applicar ciecamente questo Principio subalterno e precario nelle Cose geometriche, alla pari di quello degli *Indivisibili*, che male applicato ancor lui porterebbe a falsità manifesta, siccome n' abbiamo esempj moltiplici tanto antichi quanto moderni. M' incresce di dover dire in sì fatto proposito come in un' Opera recente *elementare* dedicata all'istruzion pubblica d' una ragguardevole parte d'Italia, oltre la generazione non retta del Cilindro e del Cono *obliqui* e la misura parimente non retta della superfificie d' un Solido qualunque per via d' *immersione*, l' innopportunamente usato metodo Cavaleriano abbia prodotte non giuste dimensioni sì delle superficie de' Conoidi parabolici, sì ancora degli Sferoidi ellittici tanto *lenticolari*, quanto *oviformi*, malgrado le vere misure sintetiche datene senza prova (che altrove ho aggiunta) da Huygens poco dopo della metà del secolo XVII., locupletate sul declinare di esso da Parent, e dal Teorema *pseudo-centrobarico* d' agevolissima dimostrazione, sebben di questa mancante pubblicato dal predetto Bernoulli (*Atti* di Lipsia M.DC.XC.VII.); poichè nasce solo (vedasi la Figura nel l. c.) da EF : ED : : *somma* delle due perpendicolari, da un punto qualunque della Curva o dell' Area condotte sopra i due assi DE, DF, : *unica* perpendicolare guidata dal medesimo punto sul terzo asse GH; e ciò in virtù dei Triangoli-rettangoli simili. Se la dimensione della solidità de' Corpi *cocleari* costa dalle eleganti scoperte di Torricelli agguagliarsi a quella degli *annulari* applicandovi gli *indivisibili*, e non così nè questi nè il Principio di Pappo riescono adattandoli all' investigazione delle lor superficie, egli è perchè, come Roccha il primo ha provato, gli *elementi* delle Grandezze ed il *centro delle medie distanze* sono subordinati a una legge, che fissa un solo caso particolare nella Geometria dell' Infinito ossia nel Calcolo *sommatorio*. E come tutto concilisi rettamente e cessi ogni meraviglia l' ho spiegato in un piccolo *Saggio* di Commentario, dove trattando di ravvivare le Linee *Spiriche* di Perseo, mal confuse da taluni colle *Spirali* di Conone e dotate di pregievolissime rarità, passo insieme ad interpetrare il significato smarrito dell' intitolazione Ω'κὺτοβοὸς d' un' antichissima Opera nominata da Pappo e perduta, il cui argomento, sbagliato da Halley e Fabricio, era d' approssimarsi assaissimo per via di numeri alla quadratura del Cerchio, e il qual vocabolo Greco composto dimostro essere equipollente ad Ω'κὺτ sincope d' Ω'κὺτης (*Promptitudo*) con O ossia ὀμικρον segno *naturale* del Circolo (*Circuli*) e βοὸς, genitivo di βοῦς, che deririvato dall' Ebraico o piuttosto Fenicio בּוֹא *Bo* (*βooz*) aggiunge sempre, secondo l' Hederico e il Gretsero ed altri Eruditi nelle Lingue Orientali, come ἐπιτατικὸν l' idea di Grandezza (*Magnitudinis*); e finisco col generalizzare i pochissimi particolari della misura assegnata da Perelli e da Frisi alle Superficie in forma di *chiocciole* e d' altre vaghissime *sviluppabili*, dipendenti massimamente dalla considerazione delle *trombe* d' alcune Scale *a lumaca*. Nè di più della Sintesi pura geometrica abbisognano l' ultime speculazioni, come quelle che dietro l' idea d' un Anonimo negli *Atti di Lipsia* e di Bezout nel suo *Corso* si concludono (quando non sian compianabili) risolvendo le loro *zone* in pianetti paralellogrammici, i quali nel linguaggio comune si direbbero infinitesimi di second' ordine, senza punto ricorrere alle Formule universali derivate dall' Equazioni delle Superficie medesime; intorno al qual modo di contemplarle Monge e Tinseau specialmente si segnalarono. Ma queste egregie ricerche sono eziandio suscettibili d' ulteriore semplicità; perchè si potrebbero immediatamente far nascere dal Teorema Pitagorico, con applicarlo nelle *Istruzioni geometriche* al Triangolo ortogonio *solido*, cioè alla metà d' un Parallelepipedo rettangolo, onde servirsene poi per la Dottrina delle *projezioni* ortografiche, o sivvero per la Geometria ed Astronomia *descrittive*. Difatti gettando l' occhio sopra un Paralellepipedo della qualità divisata (Fig. 63.), oltre a vedersi chiaro che $(\Delta ADE)^2 = (\Delta ABC)^2 + (\Delta DBC)^2$ per l'eguaglianza delle altezze, e che parimente $AE^2 = ED^2 + DA^2 = ED^2 + AB^2 + BD^2$, che sono i quadrati delle *projezioni* di AE paralelle ai tre *assi* AF, AB, AG scambievolmente normali, mentre si conducan di più la retta BO perpendicolare sopra DA, e CO che per gli *Elementi* sarà ancor essa normale a DA, perchè CB è perpendicolare al pian sottoposto ABDG, si fa manifesta nei tre Triangoli ACD, AED, ABD come insistenti sulla base medesima AD la proporzione geometrica $(\Delta ACD)^2 : (\Delta AED)^2 = (\Delta ABC)^2 + (\Delta DBC)^2 :: CO^2 : CB^2$, e l'altra $(\Delta ACD)^2 : (\Delta ABD)^2 ::$

$CO^2 : BO^2$, che torna a dire $(\triangle ACD)^2 : (\triangle ABC)^2 + (\triangle DBC)^2 + (\triangle ABD)^2 :: CO^2 : CB^2 + BO^2$, o sivvero in ragione d'egualità; cioè il Quadrato dell' *area* di qualunque siasi Triangolo rettilineo eguale sempre alla *somma* dei Quadrati delle tre *aree* dei Triangoli che determinano le projezioni di lui sopra tre piani mutuamente normali. Ogni faccia di Poliedro pertanto, o qualunque Poligono o Curvilineo piano, ogni complesso di tali faccie, o intero o troncato, potendosi sciogliere difatti in triangoli finiti o immaginare sciolto in triangoli infinitesimi, ne vien subito l'universal conclusione, che il quadrato d' una Superficie di qualsisia *genere* e *specie*, come ciascuna delle sue parti o elementi, pareggi sempre la *somma* de' quadrati delle tre *projezioni* suddette; d'onde deriva quel Teorema generale, in virtù di cui, dopo varj Lemmi perlopiù ricavati dalla Trigonometria-sferica nel modo ordinario, espressa che sia da $dz = pdx + qdy$ l' Equazione alla Superficie, l'espressione del suo elemento infinitesimo di secondo grado consiste in $dxdy\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)$, cioè $dxdy\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$, dovendo esser $p = F(q)$ o viceversa, quando la misura loro dipenda da una *projezion* sola, siccome accade delle *compianabili*, a paralello delle Coniche e Cilindriche *rette*. E quelle tre *projezioni riprojettate* a rovescio sul Piano di già *projettato* ricompòngono con tutta evidenza questo Piano medesimo; lo che immantinente si concepisce nella Piramide triangolare ACDB, conducendo da B una perpendicolare sul piano ACD, la quale col suo punto d' incontro vi segnerà il vertice comune ai tre Triangoli parziali di *riprojezione* integranti l'intero ACD, e si generalizza per il detto di sopra a tutte le *aree* delle Figure piane sì rettilinee che curvilinee. Coll' istessa facilità sintetica si risolve il Problema dei tre Pesi come ho avvisato dopo il Numero 4. dello Scolio dell' Assioma. Imperciocchè divisa in I (Fig. 64.) l' orizzontale CD nella ragione inversa de' Pesi A, B, il *Centro di gravità* d' ambidue si troverà sempre (comunque essi scorrano) nella verticale indefinita IM, e sarà *massima* la sua discesa allora quando Z Q = TS : ZB : : S O : OZ, cioè BD : BC : : CI : ID : : B : A, ossia (raddoppiata la Figura) quando 2BD rappresenterà il Peso doppio intermedio e BC, BN i due estremi eguali A, H, e vale a dire subito che i tre Pesi A, H, 2B vengano ad essere proporzionali ai due lati BC, BN, ed alla diagonale 2BD del Rombo, la cui metà è il Triangolo CBN, come avviene nelle Corde tese, nei Condotti forzati, ec., in sequela di ciò che diremo nell' Articolo successivo del Paralellogrammo delle *forze composte*. Questa legge però della discesa *massima* del Centro di gravità, che in altri casi diventa poi *minima*, e nella più parte *nulla*, non dee tampoco passarsi come fondamento universale dell' equilibrio. Lo ha saggiamente avvertito Carnot, e soprattutto lo persuade il sapersi che nell' ipotesi stessa della gravità *costante*, mentre le sue direzioni andassero a un punto o a più punti (come pur vanno sulla Terra), mancherebbe il Centro di gravità; dal che molti si sono in varj tempi maravigliati, che l' uso fattone nella Geometria da Archimede in poi non abbia portato al falso, annoverandolo fra i *Paradossi*. Avanti di Descartes, Roberval, e Pascal, di Fermat, Hudden, e Schooten, o almeno contemporaneamente ad alcuni di loro, erano nati dei dubbj (dopo un falso supposto di Guidubaldo) tra i Filosofi della Toscana in proposito della mobilità o non-esistenza d' un Centro fisso d' *equilibrio* nei Corpi gravi correspettivo allo stato *vero* della Gravità terrestre, e vennero in campo delle Quistioni epistolari curiose fra Torricelli e Ricci e Viviani, di cui si conservano i monumenti. Se l' Istoria delle Matematiche fosse più conosciuta e trattata con maggior Critica, gli Italiani potrebbero facilmente rivendicare a favore di Torricelli la prima idea di risolvere i Problemi Dinamici collegando le velocità *virtuali* colla *mas-*

sima discesa del Centro di gravità, siccome egli fece, e poi Vanni, cercando il valore della Gravità *relativa* in un Piano declive; la qual *massima* discesa venne più tardi presupposta da Varignon, onde introdurla eziandio come *Principio* nell' Idrostatica. Dalla vera Storia saprebbesi, che dopo Archimede, non a Perelli (come qualche men informato Elogista ha supposto), ma al Valerio, a Torricelli medesimo, a Lorenzini, allo Slusio si debbono le dimostrazioni eleganti delle misure non solo delle solidità degli interi e dei tronchi di tutti i Conoidi e Sferoidi, come unitamente dei loro Centri di gravità; e che il Regiomontano (siccome altri ha preteso) non è un Astronomo dell' Italia, essendo anzi sotto questo nome *gentilizio* inteso da tutti Mullero di Konigsberg (*Regius Mons*), Città primaria della Prussia Reale, cioè la Patria medesima del Filosofo Kant tra i moderni. Del rimanente tornando a discorrere della Gravità terrestre, quanto egli è fuori d' ogni dubbiezza, che suppostala sempre dell' istessa efficacia a qualunque distanza dal centro, ove convergano le di lei direzioni, non vi sarebbe *rigorosamente* mai luogo nei Corpi al *Centro di gravità* nè al principio della sua *massima discesa*, ch' Euler infra gli altri notò come Regola generale dell' equilibrio, altrettanto è falso che vi sarebbe allora quando la Gravità scemasse o crescesse in ragione *inversa* delle distanze contate dal centro di diffusione di questa Forza, avendo sol luogo mentr'essa all' incontro fosse in ragion *diretta* delle distanze medesime, siccome nella Figura 65. m'accingo cogli *Elementi* a provare indipendentemente dal Calcolo differenziale e dal *maximum*, che Carnot pose in opera per dimostrarlo. Sia la Libra o Vette AB, agli estremi di cui vengano situate due molecule eguali di materia pesante secondo la legge indicata, stando in S il Centro di Forza. Essendochè dunque i Pesi respettivi di A, B sono come AS, BS, la Forza loro *risultante* verrà rappresentata dalla diagonale SX del Paralellogrammo SAXB (vedasi l' Articolo seg.), la quale dividendo per metà l' altra AB in T determimina la Bilancia AB come nel caso delle due Forze paralelle ed eguali, ed in qualunque situazione della medesima più o meno inclinata rispetto a ST raggio medio; e conclude l' istesso anco la prova ingegnosa datane da Torricelli, abbenchè (stando almeno a ciò che Grandi riporta) da lui presa in senso contrario. Suppongasi adesso in qualunque punto I del braccio TB una terza molecola eguale a ciascuna delle due prime, la cui forza di gravità in conseguenza vien espressa da IS, che combinata con SX dà per *risultante* SOP diagonale di ISXP altro Paralellogrammo, cioè un Vette AB col fulcro in O, il braccio più lungo OA colla molecula A da una parte, il più corto OB con due molecule in I e B dall' opposta. Ora condotta ZT, la quale in virtù della bisezione delle due diagonali SX, XI è paralella a SI, abbiamo $SI = 2TZ$, e perciò $IO = 2OT$, $AO - 2OT = AO - IO = OB$, che vale a dire $AO = OI + OB$, o sivvero eguali i *momenti* dall' una e dall' altra parte dell' ipomoclio O ossia *Centro di gravità* delle tre molecole A, I, B, come nella Leva ordinaria sollecitata da forze paralelle ed eguali. Aggiungasi la quarta molecula C pari alle altre ed ancor essa pesante in ragione di SC sua distanza dal Centro comune; e coi due lati CS, SP descrivasi al solito il Paralellogrammo CSPR, la cui diagonale RVQS bisecherà in V la seconda diagonale PC, e rappresenterà la nuova *risultante* di tutte e quattro le Forze supposte, con Q nuovo punto d' appoggio. Condotta VZ e prolungata fino in H, questa VH non solamente sarà paralella a CS mercè della bisezione simultanea delle diagonali PC, PS in V, Z, ma ancora alla medesima eguale, perchè $CS = 2VZ$, e di più $CS : ZH :: SI : ZT$, ossia $CS = 2ZH$. Avremo dunque CSHV Paralellogrammo; laonde la di lui diagonale CH divisa in Q per metà, e perciò $CQ = QH$. Ma $CO : OH :: CS : ZH :: 2 : 1$, o sivvero $CO = 2OH$, e $CO - OH = 2OQ = OH$, ossia $CO = 4OQ$, $CQ = 3OQ$, $AQ = AO + OQ = 2OI + IB + OQ$ (per le cose di già dimostrate) $= 2OQ + 2QI + IB + OQ = 3OQ + 2QI + IB = QC + QI + QB$; cioè Q *Centro* *di gravità* delle quattro molecule, A nel braccio maggiore QA, e tre C, I, B nel minore QB del Vette AQB, ossia quello stesso che apparterrebbe all' ipotesi della Gravità costante indirizzata ad un Centro infinitamente lontano. Seguitando il discorso medesimo di semplicissima Sintesi ognuno s' accorgerebbe come il *Luogo* geometrico, su cui terminano tutte le *risultanti* consecutive SX, SP, SR, ec., divergenti dal Centro S, sia la serie de' vertici degli angoli d' un Poligono AXPR ec., i lati del quale si agguagliano alle *secanti* SB, SI, SC, ec., mentre gli angoli AXP, XPR, ec., sono eguali ai *supplementi* di BSI, ISC, ec. compresi infra le stesse *secanti*: e parimente vedrebbesi, che con caricare ora l' uno ora l' altro braccio di Leva di nuove molecule, verrebbe a concludersi in generale come quel medesimo *punto*, il quale sostenuto, sospeso, ec., o colla sua *massima* possibil discesa verso il Centro de' gravi determina l' equilibrio nella Libra, nel Vette, o in qualunque Sistema di pesanti molecole (che finalmente è un ammassamento di Libre e di Vetti) posta l' antica supposizione d' Archimede sulla Gravità terrestre, lo determina ancora sostituita l' ipotesi della Gravità diretta ad un Centro non-immensamente rimoto e proporzionale alle distanze dal comun Centro suddetto. E quanto è lontano dal fatto della Natura, richiamato avanti d'ogni altro da Gilberto e Roberval all'*attrazione* della massa terrestre, l' antico supposto, altrettanto lo è l' ultimo in Fisica avvengachè adoperato da Herman, come quello che al più non vorrebbe secondo Newton, Maclaurin ed altri, se non se sotto Terra (o sferica o sferoidale ch' ella si fosse), o nel traforo centrale Maupertuisiano, intorno a cui tanto risero Voltaire e Federico II.: quantunque, se fossero sopravvissuti di pochi anni, avrebbero forse (e chi mai potrebbe saperlo?) creduti più singolari il Capitolo XII. del Tomo I. ed il I. e III. del Tomo II. d'una moderna dubitativa *ageometrica* Geogonia. Un altro Archimede, un altro Pappo contuttociò, un altro Keplero ro o Guldino a questa ipotesi *falsa* di Gravità avrebber potuto appoggiare egualmente i Teoremi loro *centrobarici*, onde coglierne per la Geometria il medesimo frutto come dall' altra non meno *falsa* supposizione; e lo averebbero potuto fare coll' istessa applicazione felice, se qualche diversa *legge* ipotetica di Gravità avesse portato a fissare un *Centro* di forze costante per ogni sito d' un Sistema di punti gravi, cioè un'eguaglianza *perpetua* di *momenti* contati col mezzo di perpendicolari e riferiti a tre *assi* o tre *piani*, e se questo *Centro* di forze non fosse stato un accidente speciale di quelle due sole ipotesi, come concentrasi la mutua Gravità nelle Sfere, o piene o vuote, non altrimenti che quando essa agisca in ragion reciproca dei Quadrati delle distanze, nè mai sotto reciproca diversa *Funzione*. Nulla dunque prende realmente la Geometria dalla Statica tutte le volte ch' ella misura sotto apparenza di Gravità le Aree piane, le superficie e capacità de' Corpi rotondi: in sostanza non si fa altro paragonando i *momenti*, le lunghezze respettive de' Vetti, e le mutue distanze dei *centri di gravità*, fuorchè assegnare i *medj* aritmetici delle innumerevoli rette normali ad un asse, o delle periferie e de' circoli ch' ànno i centri in tal *asse*; e sa ognuno, che i *medj* aritmetici moltiplicati pel numero, qualunque ei sia, degli *elementi* delle Grandezze *generatrici* s' agguagliano alle *somme* o quantità *generate*, quand' anco non vi fosse mai stata Gravità nei Corpi naturali, o seguisse (esistendo) piuttosto questa che quella *legge*. Sarebbe l'istesso di chi dicesse (Fig. 66.) ,, Data una Squadra CQG ed ,, un punto O dentro lei, guidare per questo punto la retta ,, DOR, che sia la *minima* tra le possibili innumerabili, che ,, tutte passando pel medesimo punto andassero a terminare ,, sopra i due lati della Squadra suddetta ,, e risolvesse il Problema mediante un peso P pendente da una verga non grave AB eguale alla perpendicolare OF, che appoggiata sul fulcro O e sdrucciolante senz' attrito contro QC si fermasse nella situazione BOA; ed allora condotta l' altra normale

OE , facendo ED = OB , asserisse esser la linea-retta DOR per D ed O la *minima* ricercata . Averebbe sciolta sicuramente costui la Questione proposta , combinati insieme i ritrovamenti d' Euler, Fontana, e Wentz : ma posto ancora che non si sapessero le *leggi* dell' equilibrio, o la materia non fosse dotata di *gravità*, non tornerebbe men vero che questo *minimum* restasse sempre il medesimo , e dipendesse soltanto dalla invenzione delle due *medie* geometriche proporzionali tra OE, OF , delle quali ED la prima , FR la seconda . Così , per suggerirne altro esempio diverso dal Problema Deliaco , Vincenzio Viviani avea preparato due Trattati geometrici sino del M. DC. XLVIII., che quindi rifuse in età più provetta, ed erano pronti alla stampa nel M. DCC. XV. come Opere postume di quel Sintetista eccellente Toscano . Io ne possiedo presentemente gli Autografi intitolati *Tetragonismicorum Libri* II. — *Centrobarycorum Libri* II., e non averei mai mancato di pubblicarli se gli argomenti , intorno a cui si raggirano, fossero stati di tal natura da contribuire in qualche modo all'avanzamento delle Teorie matematiche . Non faccio parola del terzo rispetto al quale ho parimente il MS. del medesimo Autore col titolo *De Terebratione Solidorum Liber unicus*, perchè quantunque più voluminoso dei primi, s' occupa di trafori facilissimi di Solidi semplici interi o troncati rotondi , cioè Coni e Cilindri retti, Conoidi, Sferoidi, compreso eziandio (Prop. ultima o 43.) il Cilindroide iperbolico (negletto da Archimede e considerato da Wallis , Wren e Parent) , ch' egli chiama *Anticonoidale Hyperbolicum* , come quelli i quali secondano la direzione precisa de' loro assi , e non hanno altra mira che l' unica d' assegnar la ragione fra tutto il solido e l' Anello che resta dopo il traforo ; senza mai parlare di Superficie che ammetterebbero almeno qualche difficoltà nei Problemi , e senza tampoco accennare ciò che assai tempo addietro meditando su queste perforazioni m' è occorso agevolmente scoprire in aumento della celebre *Volta a vela quadrabile Fiorentina*, ossia che „

„ Se il Cilindro-retto traforante la metà della Sfera abbia „ per altezza il diametro della medesima, la parte di Superficie cilindrica che riman fuori, s' agguaglia appunto alla sferica tolta ove nascono gli *occhi* della *Vela* „ tacendolo ancora il Grandi ne' suoi *Vivianèi*. Ora quei due primi Trattati, i quali per i principj di Statica rimandano alle debolissime prove datene dal Cavalieri, hanno in oggetto di determinare i *Centri di gravità*, onde col mezzo di questi conseguire la *quadratura* del Circolo, e delle *aree* delle Coniche curve e loro porzioni, mentre quel *Centro* presuppone già note le *quadrature* cercate (*Monitum* dopo la Prop. XIII. Lib. I. *Tetragonism.*); o di confrontare i *momenti* di Spazj curvilinei da un lato e rettilinei dall' altro sul modello del Teorema di Pappo (*Scholium* in seguito della Prop. VI. Lib. II. Op. c.); o di *quadrare* per simil via la Parabola in cinque modi diversi da quello, che nel M. DC. LVIII. aveva prodotto l' Autore nella sua *Divinazione* del Libro V. dei *Conici* d' Apollonio; o di considerare i perimetri o superficie degli *Arbèli* (ἅρβηλος) quadrandone alcuni sì antichi che nuovi già misurati da Vieta, immaginandone altri di facilissima dimensione, ed assegnandone i *Centri di gravità*, come eziandio dei *Menisci* (μὴνισκος) tanto d' Ippocrate, quanto dell' istesso Vieta e di Slusio; o finalmente di stabilire ove cadano i detti *Centri* rispetto alle superficie e solidità delle Sfere, Settori e Segmenti sferici, Coni retti e respettive parti di essi. Tranne però qualche determinazione *elementare* di Quadrilateri *minimi* circoscrittibili o Triangoli *massimi* iscrittibili nelle Coniche, o di qualche *massimo* Arbèlo dentro una parte di Cerchio, o d' una Lunula elittica agevolmente *quadrabile* (Scolio V. dopo la Prop. XXXI. Lib. I. *Centrobar.*) a differenza della Ciclico-Parabolica contemplata da Wolff, o di Settori sferici e conici particolari, che godono del medesimo *Centro di gravità* sì per rapporto alla loro *veste* che alla propria *capacità* (Prop. XVI. Lib. II. Op. c.), o di Bicchieri *massimi* infra gli innumerevoli cilindrici, conici, sferici *isoperimetri* (*Monitum* in calce della prec. Prop.), tutto questo lungo lavoro conduce sostanzialmente all' unica conseguenza „ Dato il *Centro delle medie distanze* „ d' una Grandezza continua assegnar la misura di lei e del„ le sue *derivate*, ossia, data la misura della Grandezza o „ generatrice o generata assegnar la misura della medesima „: Proposizione *identica*, e che non è nè sarà mai *Paradosso*.

ARTICOLO II.

DELLA COMPOSIZIONE E DECOMPOSIZIONE DELLE FORZE.

Lemma.

Due eguali tensioni o pressioni simultanee contro d' un punto, rappresentate da due linee rette parimente eguali sotto qualunque angolo misurante la relazione delle respettive direzioni d' entrambe le Forze, equivalgono ad una tensione o pressione sola rappresentata dalla diagonale di quel *Rombo*, i lati del quale siano le rette indicate, condotta dal punto premuto o stirato.

(Riducendosi le tensioni a pressioni, e viceversa, col mutare la direzione d' una forza stirante nella diametralmente contraria, che la cambia tosto in premente, nominerò in appresso unicamente le prime, senza punto offendere per questo silenzio o menomare la generalità delle prove. A fine poi di rappresentare queste tensioni con un artificiò di facil concetto, che le riporti a' *momenti* di braccia delle Leve diritte considerate nel I. Articolo, onde far dipendere tutta la Statica da un solo Principio, quale si è quello della Bilancia *semplice* d' Archimede, suppongo (Fig. 67.) che il *niso* o *momento* di rotazione prodotto da una data forza F, sollecitante l' estremità B d' un braccio AB di Leva diritta in direzione alla medesima perpendicolare, sia immaginato me-

mediante un *filo* connesso coll'estremità predetta del braccio rivoltarsi ad angolo retto o qualunque altro, e comunicarsi per via di troclea o bilancia *perpetua*, o in diverso modo che paresse più acconcio, v. g. con una *squadra-a-bilico* ec. (Fig. 68.), (Coroll. II. e III. dell' Assioma) al punto A o suo equipollente staccato da questo, sopra il quale s' appoggia il medesimo braccio. Così quel *niso* diventa tensione sollecitante il punto A, e di tale e tanta misura, quanta appunto appartiene al *niso* o conato suddetto, cioè pel Teorema precorso, quanta è in proporzione rappresentata dalla maggiore o minor lunghezza del braccio AB, ferma stante la grandezza della forza ora in B, quindi col suo corredo in B′, $_{,}$B, ec., come risulta dal *contranniso* di rotazione o *contrammomento* d'equipondio, che per le cose di già dimostrate farebbe di mestieri situare all' estremo C del braccio opposto AC, tenuto sempre dell' istessa lunghezza. Vale il discorso medesimo rispetto al Sistema di due o più bracci di Leve combinate in *asteroidi* regolari o irregolari, subito che col divisato artificio o consimile i *nisi*, conati o *momenti* delle Forze normali ai loro estremi vogliano idearsi propagati o comunicati ad un punto equipollente al *centro* o *pseudocentro* comune in qualità di due o più simultanee trazioni (vedasi il Corol. II. del Teorema seguente), ridotta la *rosa* dell' insieme di queste Forze coll' idonea collazione (agevolissima a concepirsi) dei predetti mezzi artificiali ad agir nello stesso piano.)

Si rileva dal fondamento d' *identità* (Fig. 69.) che la *risultante* delle due eguali forze F di trazione per IB, IC, debb' essere nella direzione della retta indefinita IO bisecante l' angolo BIC (ved. l' Assioma), e che nel di lei prolungamento dalla parte direttamente contraria IE abbia da collocarsi ed agire la terza forza di trazione eguale alla *risultante* stessa, per l' effetto d' indurre lo stato di riposo nel punto I, ossia l' equilibrio. Ma sappiamo dal Corollario V. del Teorema premesso e dalla Figura 44. che nell' *Asteroide* *trifida* simetrica o euritmica, qualunque sia l' angolo BIC formato dai due raggi eguali, i due *nisi* o *momenti* di rotazione intorno ad I, cioè F.IB, F.IC, rappresentati proporzionalmente dai due bracci di Leva IB, IC, ch' è quanto dire due trazioni del punto I proporzionali a IB, IC, danno per *niso*, o *momento* o trazione *risultante* 2F.ID=F.2ID o sivvero proporzionalmente 2ID, bilanciata perciò dal *contranniso* o *contrammomento* o controtrazione sempre *costante* F.IA = F.2ID, rappresentata da IA = 2ID in direzione contraria. Essendo adunque IS diagonale del *Rombo* IBSC (come parimente di tutti gli innumerevoli altri, i cui lati eguali che parton da I, e sono rappresentanti dei respettivi conati, *nisi* o *momenti* di rotazione per rapporto al punto medesimo I, ossia delle forze respettive convertite in trazioni decrescenti o crescenti, vadano a terminare sulla normale ad EO eretta da D) eguale appunto a 2ID, resta provato pienamente l' assunto.

COROLLARIO I.

Le Bilancie sollecitate agli estremi delle loro braccia da Forze eguali, ma non altrimenti perpendicolari alla verga nè paralelle infra loro, ed anzi con direzioni di tal sorta, che facciano insieme qualunque angolo nel loro incontro reciproco o dei respettivi prolungamenti; le Troclee o Bilancie *perpetue* considerate da Wallis, Varignon, ec. (Corol. III. dell' Assioma), che siano nel medesimo caso; le Bilancie o Libre piramidate, ch' abbiano i tiranti o gli *spigoli* di numero *pari*, già state avvertite nel fondamentale Assioma citato; somministrano adesso il modo facile di rintracciare il valore della Forza *risultante* dalle due o più Forze eguali, della quale per l' *identità* conoscevasi solamente la direzione. Imperciocchè senza il soccorso di nuove Figure è di per se manifesto, che la *risultante* cercata equivale nei due primi casi alla diagonale di quel Rombo dotato dell' istess'angolo delle due direzioni, posto che ciascuno de' lati rappresenti la Forza di duplice stiramento o trazione; e nell' ultimo caso parimente si vede con tutta chiarezza che gli *spigoli* rappresentando le Forze, ogni coppia di questi diametralmente opposti costituisca i due lati d' un Rombo *costante*, onde la sua diagonale ripetuta tante volte, quant' è il numero delle coppie o *binarj* suddetti, ossia moltiplicata per la metà del numero dei tiranti, rappresenti la trazione unica *risultante*. Da questo Lemma in oltre deriva, che quanto più s' apre l' angolo delle due eguali Forze traenti, rimanendo esse ferme nel loro valore, tanto più scema la *risultante* come appunto scema la diagonale del Rombo giusta i precetti di Geometria; e di più che la diagonale d' un Quadrato (il quale appartiene ancor esso alla *specie* de' Rombi e non n' è che una semplice *varietà*) sia la *risultante* di due Forze eguali e proporzionali al suo lato, traenti in angolo retto. La prima proposizione è provata da Dalembert in una maniera men naturale e indiretta; laddove il secondo teorema è quello, da cui Daniello Bernoulli si partì per mostrare con metodo assai prolisso, e di sovente mediante il calcolo analitico, come generalmente si *componessero* in quantità e direzione due Forze qualunque sollecitanti un punto, e perciò situate sopra il medesimo piano. Ma sebbene parecchi anni dopo con tutta ragione il prelodato Dalembert avvisasse, che l' aver preso Bernoulli tra i Rombi il Quadrato per fondamento della sua elaborata dimostrazione fosse uno dei tre *difetti* potissimi da lui rilevati nella medesima, a motivo che v' era luogo di meglio impostarla con isceglierе il Rombo di 120° e 60° quanto a' suoi angoli, come quello la cui diagonale più corta in virtù degli *Elementi* geometrici pareggia il lato, e rispetto al quale per *identità* l' equilibrio delle tre eguali Forze traenti (e perciò ancora la *risultante* di due) è d' evidenza intuitiva; nulladimeno convien riflettere, che l' evidenza, della quale si parla, non è solamente ristretta a questo Rombo particolare, come parrebbe potersi dedurre dalla di lui reticenza, ma comprende altresì per l' istesso principio tutte le *Asteroidi* regolari, o di numero pari o dispari di raggi, mediante i quali venga stimolato il centro delle medesime da eguali forze traenti. Ed in ciascuna di queste *Asteroidi* di trazione, e massimamente nelle imparilatere, brilla sì fatta analogia colle *Asteroidi* a bilancia, che merita d' essere in brevissimi termini considerata. Sarebbe inutile fermarsi di più nel contemplare la *trifida* della Figura 69, sì rispetto ai limiti degli innumerevoli Rombi più o meno aperti, uno dei quali è la diagonale a tutti comune IDS (dove la Forza ID si può dir coacervata con raddoppiatura di *filo*, come nell'*appoggio* d'una Bilancia annichilati i suoi bracci), mentre dalla parte de' semprepiù aperti non havvi confine assegnabile; sì rispetto all' equipollenza *costante* delle due Forze di trazione IB,IC, IB', IC', IB'', IC'', ec., $I_{,}B$, $I_{,}C$, $I_{,,}B$, $I_{,,}C$, ec. a 2.ID, comunque più o meno lunghi siano i raggi ad esse proporzionali, non diversamente da ciò che accade delle Forze normali ai bracci più o meno lunghi avvertite nel Corollario V. sopracitato, le quali indipendenti affatto dalla lunghezza o apertura di questi bracci, o dalla lunghezza della frapposta verga di Bilancia, danno sempre per *risultante* o accumulata in D la medesima Forza, che paragonandola nella Leva a quella in A o all' equipondio rappresentato da IA, vale $2ID = IS = IA$; sì finalmente per rapporto al punto I, ch' è sempre *centro di gravità* dei tre punti A,D,D; A, B'', C''; A, B', C'; A,B,C; $A, {}_{,}B, {}_{,}C$; $A, {}_{,,}B, {}_{,,}C$; ec. disposti in Linea retta o Triangolo equicrure, laddove le rette, che vanno da quel *centro* ai tre punti sono proporzionali alle tre Forze traenti nel medesimo piano il punto o *nodo* suddetto. Giova piuttosto l' osservazione importante, che data qualunque *Asteroide* regolare *multifida* (come quella, per esempio, della Figura 70.) colle trazioni del punto centrale I tutte eguali per le direzioni de' raggi, l' equilibrio evidente suggerisce, che debba essere $2ID + 2IS - 2IO - 2IB - IA = 0$; poichè in virtù del Lemma precedente ID,IS,IO,IB so-

sono le mezze-diagonali dei Rombi formati dai raggi CI e IQ, TI e IM, IN e IP, IR e IE rappresentanti le Forze. Ora questa generale Equazione è appunto l' istessa di quella ottenuta di sopra (Coroll. II. del Teorema) per rapporto ai *momenti* d' un' *Asteroide* a bilancia caricata di Forze eguali ne' vertici di tutti i suoi angoli e convertita per le loro *risultanti* in una Leva diritta *composta* AID, come tutte le trazioni cumulate e ridotte nella medesima linea retta per mezzo di *risultanti;* e l' unico *Centro di gravità* I serve egualmente al Sistema de' punti A, E, P, M, Q, C, T, N, R dove agiscono le Forze normali al piano e le altre traenti nel piano. Tanta e si mirabile è la comunione dell' eguaglianza dei *momenti* nell' uno e nell' altro senso, tanta e sì luminosa apparisce l' armonia di correlazione, che lega insieme entrambe le *specie* delle rammentate *Asteroidi*, da non poter mai dubitare dell' intima dipendenza (finora non abbastanza illustrata) dall' istesso principio. A fine di avvalorarla viemaggiormente non debbo tacere, che nelle *Asteroidi* raccorciate o protratte, come quelle delle Figure 45. e 46., salve per le Forze di trazione rappresentate da raggi ora più ora men lunghi le condizioni medesime, le quali si leggono nel Corollario V. dell' antecedente Teorema, si verifica sempre l' equilibrio e l' eguaglianza de' *momenti* da un lato e dall' altro del punto I, *centro comune di gravità* dell' istesso Sistema di punti; e ciò malgrado la diseguaglianza delle Forze traenti proporzionali ai diversi raggi (o differenti bracci di Leve delle *Asteroidi* a bilancia ed a Forze eguali) e la diseguaglianza degli angoli centrali: perchè IC, IB, IA, ovvero IC, IO, IB, IA sono sempre o le metà delle diagonali de' Rombi impostati sopra ogni coppia di raggi, o le linee rappresentanti le Forze intere *solitarie* e non appajabili in virtù della loro *grafica* disposizione.

CO-

COROLLARIO II.

Bernoulli, Dalembert, Foncenex, e quant'altri rispettabili Autori o colla Geometria o coll'Analisi, e massime in ultimo luogo colla Teorica delle funzioni delle variabili, hanno travagliato dottamente per isciogliere il Problema della *composizione* di due o più Forze agenti sul medesimo punto, furon costretti (eccettuandone pochi, infra i quali il Venini mediante la considerazione unica del Quadrato e l' altra, sebbene incompleta, de'Seni) a premettere come preliminari le dimostrazioni di varj Teoremi risguardanti la *risultante* nei Rombi, che a pàrer mio potevano rendersi molto più semplici, perchè derivabili dalla sola Sintesi *elementare*. Tale appunto è lo scopo del Corollario presente. — 1. „ Conosciuta la diagonale *risultante* da due Forze eguali concorrenti colle loro direzioni in un angolo dato Φ, conoscerla parimente per „ la metà di quest' angolo, o viceversa pel doppio, e proseguendo nel modo medesimo per $\frac{\Phi}{2^n}$ e $2^n.\Phi$ in infinito, „ qualunque sia l' esponente n, purchè numero intero „. Sia (Fig. 71.) ABDOECAO il complesso di due Rombi *identici* combinati sopra AO loro lato comune. Non ha dubbio che l'angolo BAC non venga ad essere doppio di $BAO = CAO$, e che BD, CE non sian paralelle infra loro siccome ad AO comunque protratta, e tutte tre perpendicolari a BC, DE, e finalmente che il Rombo ADPE formato colle diagonali dei due primi Rombi non sia simile a ciascheduno di essi. Posto ciò, come AD, AE sono le respettive *risultanti* delle quattro Forze AB, AO, AC, AO, due per due, così in virtù d' *identità* di ragione nel Rombo simile ADPE la *risultante* delle due *risultanti* AD, AE non può non essere $AP = 2AN$. Dunque la *risultante* delle due sole AB, AC debb' essere $2AN - 2AO = 2AN - 2DB = 2AN - 2NM = 2AM = AI$ diagonale del Rombo ABIC d'angolo doppio dell' assegnato. — 2. Vago ed elegante è il prospetto, che questo Teorema discuopre applicandolo al particolare del Rombo (Fig. 72.), ch' abbia il suo angolo ottuso eguale al terzo di quattro retti; Rombo, (Corol. precedente) per antonomasia chiamato *dell' equilibrio*. Delineando difatti pel metodo superiore in seguito del dato Rombo ABCD, di cui l'angolo $BAD = 120^\circ$, i suoi *derivati* in infinito col dimidiar sempre gli angoli successivi, cioè AEGF, AIMK, ANRO, AQTS, ec., si vede chiaro che i lati AB, AE, AI, AN, AQ, ec. di questa *serie* interminabile di Rombi, generatore cioè e generati in infinito, e quindi ancora i segmenti BE, EI, IN, NQ, QX, ec., a loro respettivamente eguali, della retta indefinita BZ, stanno nella progressione diretta delle Cosecanti o inversa de' Seni degli angoli di 60°, 30°, 15°, $7^\circ\,30'$, $3^\circ\,45'$, $1^\circ\,52'\,30''$, ec., o in generale $\frac{120^\circ}{2^n}$, sino ad un limite $\frac{120^\circ}{2^\infty}$ menomissimo inassegnabile; mentre non è meno certo che le diagonali ossiano *risultanti* consecutive AC, AG, AM, AR, AT, ec., ovvero le loro metà AL, AP, AG, AM, AR, ec., seguono la progressione *diretta* delle Cotangenti degli istessi angoli o l' *inversa* delle loro Tangenti. Oltrediciò quella medesima *Scala*, le cui *parti proporzionali* segnano i lati rappresentanti le Forze BE, EI, IN, NQ, QX, ec., segna altresì colla sola aggiunta comune di AL le metà delle *risultanti* AL, $AL + BE$, $AL + BE + EI$, $AL + BE + EI + IN$, $AL + BE + EI + IN + NQ$, $AL + BE + EI + IN + NQ + QX$, ec., com' è facile rilevar subito dalla Figura. Nascono adunque le seguenti Equazioni trigonometriche, colla medesima chiarissima legge prolungabili all' infinito, cioè

$$\text{Cot.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,60^\circ = \text{Cot.}\,30^\circ$$

$$\text{Cot.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,30^\circ = \text{Cot.}\,15^\circ$$

$$\text{Cot.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,30^\circ + \text{Cosec.}\,15^\circ = \text{Cot.}\,7^\circ\,30'$$

$$\text{Cot.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,30^\circ + \text{Cosec.}\,15^\circ + \text{Cosec.}\,7^\circ\,30' = \text{Cot.}\,3^\circ\,45'$$

$$\text{Cot.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,30^\circ + \text{Cosec.}\,15^\circ + \text{Cosec.}\,7^\circ\,30' + \text{Cosec.}\,3^\circ\,45' = \text{Cot.}\,1^\circ\,52'\,30''$$

ec. ec.

e vale a dire le *trinomiali*

$$\text{Cot.}\,60^\circ + \text{Cosec.}\,60^\circ = \text{Cot.}\,30^\circ$$

$$\text{Cot.}\,30^\circ + \text{Cosec.}\,30^\circ = \text{Cot.}\,15^\circ$$

$$\text{Cot.}\,15^\circ + \text{Cosec.}\,15^\circ = \text{Cot.}\,7^\circ\,30'$$

$$\text{Cot.}\,7^\circ\,30' + \text{Cosec.}\,7^\circ\,30' = \text{Cot.}\,3^\circ\,45'$$

$$\text{Cot.}\,3^\circ\,45' + \text{Cosec.}\,3^\circ\,45' = \text{Cot.}\,1^\circ\,52'\,30''$$

ec. ec. ;

lo che riscontrando coll' Equazione $\text{Cot.}\,x + \text{Cosec.}\,x = \text{Cot.}\frac{x}{2}$, la quale è l' istessa di $\frac{\text{Cos.}\,x}{\text{Sen.}\,x} + \frac{1}{\text{Sen.}\,x} = \frac{\text{Cos.}\frac{x}{2}}{\text{Sen.}\frac{x}{2}}$ e conduce all'espressione notissima $\text{Sen.}\,x = 2\,\text{Cos.}\frac{x}{2}\,\text{Sen.}\frac{x}{2}$, non solamente viene ad essere confermata l' antecedente teoria, ma generalizzata eziandio alle altre *serie* di Rombi generati col metodo superiore. — 3. Passando più avanti, quando già si sapesse essere la diagonale in tre Rombi la *risultante* di due eguali Forze, concorrenti colle direzioni loro sotto tre diversi angoli dati Φ, Ψ, $\Phi - \Psi$, non si mancherebbe di conoscer tampoco la *risultante* pel caso che le due Forze agissero sotto d' un angolo pari alla *somma* $\Phi + \Psi$, o viceversa, permutata la combinazione, alla lor *differenza*. Imperciocchè (Fig. 73.) posti entrambi gli angoli dati PAQ, DAB, e descritti i Rombi respettivi APQN, ADPB, colle diagonali AN, AP, e ripetuto dalla parte opposta il terzo Rombo *identico* al secondo (come di sopra), cioè sulla sua diagonale omologa AQ, onde *simetrizzare* al solito tutto l' insieme, immantinenti si scorge e c' insegna la Geometria *elementare*, che BAC = PAQ — DAB, angolo del quarto Rombo BACI, e DAE = PAQ + DAB; e ci ammaestra di più, che dopo condotte le rette DE, BC, PQ a compimento della Figura, e dal punto B guidata la normale BS a PQ, non solamente DE, BC, PQ sono perpendicolari in O, M, T ad AI, ma oltrediciò che BS = MT = AO atteso l' *identità* de' Triangoli DAO, PBS per se stessa evidente. Quindi è, che la *risultante* delle quattro Forze AD, AB, AC, AE essendo per l' ipotesi quella di AP, AQ, e di queste due in virtù della stessa ipotesi 2AT, mentre dalla supposizione enunciata abbiamo altresì 2AM per *risultante* delle due sole AB, AC, ne segue che la *risultante* delle due Forze eguali rimanenti DA, AE sia = 2AT — 2AM = 2MT = 2BS = 2AO, o sivvero alla diagonale del Rombo, i cui lati DA, AE, l' angolo DAE; ch' è quanto appunto cercavasi. Combinando questo Numero col primo si conseguirebbe assai facilmente tutto ciò, che intorno ai Rombi fissarono i passati Analisti. Per esempio, dati i Rombi di 60°, 30°, 30°, i quali spettano al Numero 1. ed a questo, perchè 30° = 60° — 30°, s' ottiene la *risultante* nella diagonale del Rombo di 90° = 60° + 30° = $\frac{3 \, . \, 120^\circ}{2^2}$, e mediante il citato Numero primo anco di $\frac{3 \, . \, 120^\circ}{2^n}$; assegnati i Rombi di 90°, 30°, 60°, rispetto ai quali 60° = 90° — 30°, ne deriva quello di 150° = 90° + 60°, ossia di $\frac{5 \, . \, 120^\circ}{2^2}$, e perciò ancora di $\frac{5 \, . \, 120^\circ}{2^n}$: laonde così procedendo senz' alcun limite verrebbero a discuoprirsi le *risultanti* di due Forze eguali nei Rombi, che avessero i loro angoli contenuti nella Formula generale $\frac{p \, . \, 120^\circ}{2^n}$, essendo p, n numeri interi (Teorema Alembertiano), non meno che le *risultanti* di due Forze eguali nei Rombi, i cui angoli fossero $\frac{R}{2^n}$ (Teorema Bernoulliano), significando colla Sigla R la misura dell' angolo-retto, ed aprendosi campo vastissimo a dela delle nuove combinazioni per mezzo dei Numeri antecedenti . — 4. Infra l' altre conseguenze è notabile quella (Fig. 74.), che conosciuta la *risultante* di due Forze eguali AB, AC sotto qualunque siasi angolo-acuto, come BAC, rappresentata da AO=2AI diagonale del Rombo ABOC, venga immediatamente a determinarsi anco la *risultante* delle medesime Forze disposte ad angolo-ottuso, che sia *supplemento* della *semi-differenza* tra 180° ed il primo. Difatti condotta DAE perpendicolare ad AO, tagliate su quella AD, AE eguali ad AB, AC, e descritti i Rombi in simetrica situazione (ch' è il fondamento saldo e fecondo di tutta la presente Teoria) ADPB, AEQC, colle diagonali loro respettive, le quali per geometrica necessità hanno gli estremi disposti sul prolungamento dell' altra diagonale del Rombo dato CB in PQ, vede ognuno che delle quattro eguali Forze AD, AB, AC, AE traenti il punto unico A la *risultante* debb' esser l' istessa come delle due sole intermedie AB, AC, cioè 2AI, perchè in A s' elidon le due direttamente contrarie AD, AE; il quale stato di riposo (Corol. IV. dell' Assioma) è l' equilibrio intuitivo somministrato dalla Natura. Dunque anco la *risultante* d' entrambe le *risultanti* AP, AQ dovrà eguagliare 2AI, cioè AO diagonale del Rombo APOQ, il cui angolo PAQ sempre *ottuso*, perchè eguale a DAC = BAE, ha la proprietà d' essere *supplementare* rispetto all' *acuto* ABC = ACB, o alla *semi-differenza* suddivisata. In conseguenza di che dimostrate per *risultanti* le sole diagonali maggiori de' Rombi, senza bisogno d' altra prova speciale ne sorgono ancora le diagonali minori, siccome con altro metodo stabilì Bernoulli: ed unicamente nel caso che BAC fosse un angolo di 60°, e venissero a farsi *identici* i tre Rombi ADPB, ABOC, ACQE, ed eguali le tre diagonali AP, AO, AQ, l' angolo PAQ diventerebbe *supplemento* immediato di BAC, cioè avrebbe il valore di 120°; trovandoci allora ricondotti in conferma a quella medesima *risultante*

AO nel Rombo APOQ, che dà l'evidenza dell'equilibrio, presa da Dalembert come base delle sue ingegnose dimostrazioni.

Scolio.

Quello che tanto stette a cuore di Dalembert, di fondare cioè la *composizione* delle Forze sopra il principio della Leva *diritta* animata da Forze paralelle, e non già questo sopra dell' altra secondo il costume invalso presso la massima parte degli Scrittori di Cose Meccaniche ed in ispecie seguitato da Hamilton nei suoi *Saggi* assai dopo la pubblicazione del *Nuovo Progetto* di Varignon, oramai può dirsi quasi compiuto, e compiuto palpabilmente per via di trazioni proporzionali a dei bracci di Leve sollecitati da una medesima Forza. Così potrem dire adesso con tutta la verità e col testimonio conforme de' sensi come nulla siavi in Meccanica, che a pretto ed attual vette non rassomigli. Così quel compendioso e secondario Istrumento dinamico delle velocità *virtuali* o *iniziali*, che nato in antico da picciol seme nel Vette, verificato dipoi in altre Macchine semplici, e a grado a grado confermatosi nelle composte, s' inalzò rigoglioso sotto il magnifico titolo d' *Energia* fino del M. DCC. XVII. mercè di Giovanni Bernoulli seniore (vedasi Scolio dell' Assioma al Num. 2.), e poi col nome più modesto d' *Azione* o altro simile da Maupertuis, Euler, Koënig, Darcy venne introdotto a signoreggiare in tutta la Scienza dell' equilibrio, ritorna naturalmente alla prima sorgente Aristotelica, dalla quale egli ebbe principio (l. c.), e si collega colla Regola classica del moto *attuale*, che dalla Scuola Peripatetica o senz' accorgersene o tacendolo attinsero insieme Descartes e Galileo. Quei tra i moderni Meccanici, cui piacque per ispiegare l' equilibrio di tre Forze di trazione concorrenti in un punto mediante un *finto* e vago picciolissimo moto o sbilancio, che avvenga nelle medesime (moto che comunque minimo o inassegnabile, Carnot ha saggiamente avvertito doversi immaginar sempre soggetto alla condizione immancabile di *geometrico*), nel numero de' quali sull'esempio del precitato Bernoulli, che in linea di traslato meccanico decifrò un tal mezzo, e coll'altro de' *momenti* eguali per ottener l'equilibrio le due Leggi primarie della Catottrica e della Diottrica, si distinsero Euler e Koënig, di già rammentati, assai prima di tutti i Geometri, vedrebber ora, se non m'inganno, con qualche sorte di compiacenza immedesimati i nuovi *momenti* da loro indotti sotto differenti vocaboli nella Statica coi *nisi* veri e *contrannisi* (ἀντίῤῥοπὴ) di Bilancie o di Leve. Nè potrebbe mai essere diversamente considerando (Fig. 75.), che la Leva medesima AIB, il cui braccio $AI = n . IB$, mentr' è viceversa il Peso C in A eguale a $\frac{1}{n}$ del Peso D in B, somministra di subito l'idea necessariamente associatavi, sebbene occulta, di trazione *immediata* come nell'equilibrio dinamico. Perchè se D viene obbligato al riposo in virtù del *contranniso* di C, converrà dire che D sia come un punto tirato da due Forze eguali e direttamente contrarie, alla pari dell'equilibrio intuitivo della Natura, cioè che B naturalmente tirato per la direzione DE, artificialmente ad un tempo sia tirato a rovescio da Forza eguale per la direzione DF mercè di A e della Leva interposta; non altrimenti che accade nell'impulso *immediato* e diretto di due Masse di materia non-gravi animate da velocità a loro reciproche $M . \frac{V}{n} . \frac{M}{n} . V$, che per l'istesso motivo producono l'equilibrio, dipendente ancor esso (giusta la dottrina di Dalembert) da $mv = mv$, o sivvero dall'*identità* dinamica, o dalla *bilancia* di due contrapposti *identici* movimenti *reali*. E tanto si fa maggiore o minore l'opposta Forza traente per la direzione DF, quanto facendo scorrere in guisa di *Romano* il Contrappeso C, questo si discosti o s'accosti all'ipomoclio I, dalla *relativa* situazione di cui il *contranniso*,

cquiequipollente a trazione rapporto a D, riceve la sua misura d' attività o d' energia. Una Macchina foronomica, che presto esporrò verso il termine dello Scritto presente, illuminerà meglio l' immagine, che adesso ho abbozzata: imperciocchè poco manca dopo la considerazione delle Forze *composte* nei Rombi a perfezionarne l' intera Teoria; nè d' altra nuovità in quest' ultima parte del mio lavoro posso mai ripromettermi, in sequela delle soluzioni già datene da parecchi de' più accreditati Analisti, fuori di quella che vi campeggi sempre e risplenda un solo principio, cioè la Bilancia o l' Equilibrio della Natura, consistente nell' intuitiva elisione di due Forze eguali direttamente contrarie, sul modello del semplicissimo esempio, che in calce del Corollario antecedente si legge. Ognuno poi scorge, ch' io non potrei trar profitto dalle dimostrazioni, che quasi tutti (non eccettuato il gran Newton) hanno date in proposito della *risultante* di due o più Forze, deducendola dal movimento *composto* di due o più altri moti *reali* come se fossero sciolti ed *indipendenti*, e ripetendo per quest' oggetto l' esempio vulgare della Mosca, della Formica, della Nave, ec., ossia la mobilità contemporanea della Riga, del Piano, del Bastimento, ec., col moto spontaneo ed *indipendente* o non collegato dell' Animale. Sì fatta maniera confonde colla Foronomia la Dinamica, e l' effetto colla sua causa. Conciossiachè *composte* in una le Forze simultanee e legate infra loro, le quali agiscano sopra un punto, viene ad intendersi immantinenti come si debban *comporre* parimente i due o più movimenti generati, che sono la conseguenza dell' impressione riunita di quelle Forze. Se per *composizione* di Forze si fosse piuttosto dovuto intendere la composizione di due moti indipendenti (o *reali* o *iniziali*), questo Problema non solamente troverebbesi di già sciolto (non che da Aristotele e Gemino sulla testimonianza di Proclo, e presso a poco colla dimostrazione medesima datane da Varignon sulle traccie del Fracastorio (ved. Scolio dell' Assioma al Num. 3.), da Dalembert nel suo *Trattato di Dinamica* ed avanti nell' *Enciclopedia* , e da Torelli che in ultimo luogo ha pensato di render chiaro e perfetto il decaduto metodo *originale* in un suo brevissimo Opuscolo) da tutti i Geometri dell' antichità più rimota, come quelli che lo immaginarono e contemplarono molto prima di Stevino e di Galileo (abbenchè opini in contrario Lagrange) subito che con due movimenti diversi aprirono il campo alle generazioni delle Spirali, Quadratrici, Concoidi, Cissoidi, Eliche cilindriche ed altre Curve , che dieder poi luogo alla nascita della *Geometria del moto* nel secolo XVII., intorno al qual nuovo ramo d' applicazione della Meccanica alla Scienza dell' Estensione, massime per le *tangenti* ed in modo speciale delle Cicloidi di tutte le *specie*, si distinsero assai Roberval, Torricelli, Viviani, Ceva, Grandi, ec., ec. ed assai più latamente Newton e Maclaurin, fondandovi sopra il grand' edifizio delle *flussioni* . Circa di questo argomento sovviemmi d' aver tentato anni addietro d' indovinare come Perelli mostrasse al primo invito del Radicati (per quanto Frisi racconta) che quella Curva Bernoulliana , la quale ha per tangenti (Fig. 76.) le innumerevoli linee-rette, sempre però dell' istessa Lunghezza FG, DE, BC, ec., comprese fra i lati d' una *squadra* ossia d' un angolo retto HAL, fosse porzione d' un' Epicicloide *algebraica* (avvegnachè difatti nol sia , ma piuttosto d' Ipocicloide, e ciò cred' io per inavvertenza del contatore), e tali in conseguenza che avesse, di comune ancora colle *trascendenti*, delle aree *quadrabili*, e spettasse a quella rara famiglia di Curve , che si rigenerano e si propagano ora eguali ora simili mediante la loro *evoluzione* o sviluppo . Nel meditare sopra questa Linea di sest' ordine $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, non conosciuta per quella ch' ell' era nemmeno da Dalembert e da Charles, mi sono incontrato con un' analogia sì toccante tra la detta Curva veramente Ipocicloidale, il Circolo, l' Ellisse co-

conica, e la Parabola d' Apollonio, che per quanto io l'avessi riserbata a far parte del mio *Diporto geometrico* intorno al vaghissimo Ponte ultimato nella mia Patria verso il M. D. LXIX. colla direzione e disegno dell'Ammannati, giacchè il discorso ha portato di parlare di Linee generate per via di movimenti *composti*, torna in acconcio d' anticiparla come notizia dedicata a quei soli Geometri, i quali si dilettino della Sintesi, ed ai scarsi valorosi Ingegni che associno alla pratica delle Belle-Arti le teorie matematiche, e sappiano con Quintiliano (sebben ei lo scrivesse dell' Oratoria) che *non obstant hae disciplinae per illas euntibus, sed circa illas haerentibus*. A fine di mettere il leggitore sulla strada dell' invenzione, faccio prima osservare nella Figura medesima come la Curva MNIPQ, di qualunque natura essa sia, per la *simetria* della sua costruzione rispetto ai due lati AH, AL dell' angolo-retto debbe avere un *asse* IO nella linea-retta AIO dividente in due parti eguali l' angolo suddivisato, d' onde DIE tangente nel primario vertice I viene ad essere perpendicolare all' *asse* suddetto, e sono di più, tanto AM, quanto AQ, le due estreme tangenti eguali infra loro ed a FG, BC, DE, $= 2AI$, in virtù di DAE ortogonio ad un tempo ed equicrure Triangolo. Resta adunque la Curva contenuta tutta dentro un Quadrante di Circolo AMXQ, i cui raggi estremi AM, AQ la circoscrivono e abbracciano come tangenti, mentre il di lei principal vertice I di tanto s' inalza sul punto X bisecante l' arco MXQ dell' istesso Quadrante in due Ottanti, quant' è $XI = \frac{AX}{2}$ così che descritto con tal diametro il Circolo IZXT, venga ad aver questo il suo raggio $IR = RX = \frac{AX}{4} = \frac{DE}{4}$, e perciò l' intera Circonferenza IZXT eguale a quella del Quadrante MXQ, e la Semicirconferenza $IZX = MX$ Ottante del maggior Cerchio; e vale a dire girata questa senz' alcun *strisciamento* sulla concavità XM all' indietro, il punto I arriverebbe esattamente in

M

M dopo d' aver segnata la metà dell' Ipocicloide INM: lo che appartiene eziandio all' altra metà se si facesse girar per l' avanti la Semicirconferenza ITX, onde descrivere tutta intera la Curva. Quindi è, che nei tre punti M, I, Q l' Ipocicloide descritta corrisponde al Quesito, sì perchè DE eguale alla *data* la tocca in I, sì perchè com' è l' indole *elementare* di tutte le Ipocicloidi (e generalmente delle *Roulettes*), le tangenti in M e Q dovendo essere perpendicolari all' arco MXQ, su cui rivolgesi il Circolo generatore, combinan coi raggi MA, QA, ancor essi ciascuno eguali alla *data*. Ora facilmente si scuopre valere la medesima proprietà per qualunque tangente intermedia. Imperciocchè disegnato l' altro Quadrante concentrico $\Omega I\Phi$, condotto dal centro comune un raggio qualunque $A\Psi\Theta$, e descritto sopra $\Psi\Theta = IX$ come diametro il Semicircolo genitore $\Theta S\Psi$, sarà per la natura cognita dell' Ipocicloide l' arco $\Theta S = \Theta M$; e di più la corda $S\Psi$ normale all' altra $S\Theta$ in virtù del Semicircolo predetto, sarà tangente in S dell' Ipocicloide medesima. Ma prolungata questa tangente sino in Y e K, ed avendosi l'angolo centrale $S\Gamma\Theta$ quadruplo dell' angolo centrale corrispondente $MA\Theta$, e perciò quello alla Circonferenza $S\Psi\Theta = 2YA\Theta = YA\Psi + \Psi YA$ per gli *Elementi*, cioè $YA\Psi = \Psi YA$, o sivvero $A\Psi = \Psi Y$, onde in vigore del Triangolo rettangolo YAK anco $\Psi K = \Psi Y$ per gli stessi *Elementi*, ne siegue $YK = 2A\Psi = A\Theta = DE$ retta *data*. Anzi di quì agevolmente ricavasi, guidata $A\Delta$ perpendicolare sopra YK ossia paralella a ΘS, che $KD = YS$ pel motivo di $\Psi\Delta = \Psi S$, atteso l' *identità* de' Triangoli subcontrarj $A\Psi\Delta$, $\Theta\Psi S$, e di $K\Psi - \Psi\Delta = Y\Psi - \Psi S$, laonde aggiunta ΔS, anco $SK = Y\Delta$: ed inoltre sapendosi che $YK : AK : K\Delta \div\div$ come $YK : YA : Y\Delta \div\div$, la tangente *costante* YK rimane talmente divisa nel punto di contatto S, che $YK : AK : YS \div\div$ e $YK : YA : KS \div\div$; proprietà stabilita da Giovanni Bernoulli col soccorso del Calcolo *differenziale* in proposito di questa Curva, non appresa (secondo il Coccnato) da lui per Ipocicloide. Ecco una

Curva organicamente e con semplicissimo metodo costruibile, non conosciuta finadora, ch' io sappia, per Ipocicloide dai molti, che hanno trattato di simili generazioni di Linee, infra i quali, oltre ai Bernoulli e Radicati già detti, meritano distinta menzione Newton, Hôpital, Parent, Lahire, Nicole, Maupertuis, Camus, Lacondamine, Mairan, Maclaurin, Suardi, ec., e dotata, malgrado la semplicità somma della sua costruzione, d'affezioni e rapporti mirabili con altre Curve attenenti a *specie* grandemente diverse. La di lei intera Figura è quale si rappresenta dalle lettere IABCDEFG sotto il Numero 77., analoga in conseguenza all' *evoluta* d' una conica Ellisse. Se qualunque siasi normale alla Curva (Fig. 76.) come $S\Theta$, prolunghisi in modo sino in H, che $\Theta H = 2\Theta S$ o piuttosto $SH : H\Theta$ stia in ragion *sesquialtera*, viene ad essere H centro del Circolo *osculatore*; laonde l' *evoluta* di MIQ, è una *simile* Ipocicloide descritta da un Circolo generatore di doppio diametro rispetto ad IX, girante dentro d' un Cerchio, il cui raggio $A\Sigma = 2AX$; l' *evoluta* dell' *evoluta* un' Ipocicloide *simile* anch' essa generata da un Circolo di diametro quadruplo di quello del primo generatore, ruotante dentro d' un altro di raggio quadruplo a paragone di AX; e così continuando sempre in progressione dupla crescente (2^n) nascerebbero l' *evolute* d' *evolute* d' *evolute* ec. costantemente Ipocicloidali senz' alcun limite in infinito. Sesquialtera precisamente del suo *asse* o diametro del genitore IX è la lunghezza dell' Emipocicloide MNI, e perciò tripla appunto dell' istess' *asse* quella di MNIPQ intera Ipocicloide come tripla l' *area* della Cicloide di quella del suo Circolo generatore: *sesquialtero* qualunque arco IS rispetto alla corda $I\mu$ determinata mediante l' intersezione dell' arco circolare SO concentrico a MX colla Semicirconferenza del genitore situato in sull' *asse*: tale il rapporto delle due Curve, una Quadrante di Circolo MXQ, l' altra Quadrante d' Ipocicloide MIQ, le quali racchiudono o circoscrivono l' *Occhio* geometrico MXQIM, che la lunghezza o misura dell' orlo o perimetro della prima *pal-*

pebra o inferiore a quella del perimetro della seconda o superiore, sia come la periferia di qualunque Circolo al contorno d'un Esagono regolare in esso iscritto o iscrittibile : *dupla sesquialtera* la ragione di tutta l' area dell' *Occhio* suddetto per rapporto all' altra del precitato Circolo genitore; e lo spazio ungulare $I\nu T$ determinato da IT Quadrante del genitore, $T\nu$ arco concentrico a MXQ, ed $I\nu$ arco Ipocicloidale esattamente *quadrabile*, cioè *sesquialtero* anch' esso dell' area del Triangolo IRT equicrure e ortogonio , o *subsesquiterzo* del Quadrato del raggio del Circolo generatore , o da capo *sesquialtera* la *somma* delle due Ungule (a destra e sinistra) del Quadrato del raggio medesimo . Oltrediciò, mentre tutta la Curva (Fig. 77.) IABCDEFGI è *sesquialtera* della *somma* dei due diametri tangenti ID, BF (siccome avviene che sono *rettificabili* e le Cicloidi ordinarie e le sferiche Epicicloidi) , ognuno dei quattro *Occhi* , come IHBA , sia in ragione di 5 : 3 rispetto all' *area* del Trilineo quadrantale IPBA ; e torna a dire lo spazio compreso dal doppio *Arbèlo* o Quadrilineo Ipocicloidale IABCDEFGIP è le tre ottave parti dell' *area* del Circolo IHBKDLFMI al Quadrilineo medesimo circoscritto ; laddove il quadrato inscritto ACEG è sudduplo di quello del raggio PI o subquadruplo dell' altro Quadrato IBDF inscritto nel Cerchio . Di più quando piacesse di praticare l' Ipocicloide predetta, venusta ed acconcia all' uopo com'è, per Archi di Ponti sull' esempio della Trocoide *comune* , impiegata difatti ed al sommo lodata a motivo del suo bel garbo da Viviani in ossequio di Galileo , ma che a differenza di questa , la quale s' alza ad angoli retti , nascerebbe dalle sue impostature ad angolo semiretto, non altrimenti che fanno ad angoli obliqui o *sottosquadra* le Volte de' Ponti disegnate a porzioni di Cerchio e preferite sopra d' ogni altra Linea, ed anco agli Archi di *tutto sesto* dell' antica Architettura Romana, non meno che avanti che i Barbari la deturpassero nei bassitempi colle bruttezze Gotiche o piuttosto Germaniche , oltre d' aversi allora una *Centina* geometricamente *rettificabile* ed una Volta *quadrabile* in *mezza-botte* schiacciata o Emicilindro-retto Ipocicloidale (ch' è privilegio di pochissime Curve), rendesi eziandio manifesto (Fig. 76.) che la di lui Corda MAQ passerebbe un poco più alta del centro R del Circolo genitore (quanto appunto $\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{3}{4}$), e che MQ : IA (ossia la *corda* al *rigoglio*) : : $2 : 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$, o sivvero come 2AX : XA o come il *diametro* di qualunque Circolo al *seno-verso* d' un Ottante di esso; ch' è ragione *irrazionale*, inferiore ma vicina alla *settupla* della *corda* al *rigoglio* dell' Arco, e adattatissima a un Ponte svelto, impostato sopra i suoi *pie-diritti* in maniera da impedire con i *ricaschi* il minor vano possibile pel passaggio libero delle piene d' un Fiume. Delineare sì fatta *centina* o *modine* in pratica sarebbe opera molto facile, conducendo dentro d' un angolo retto molte rette YK, FG, DE, BC, ec., tutte della stessa lunghezza, eguale a quella delle due estreme prese ad arbitrio AM, AQ, o sivvero facendo dentro quell' angolo passeggiare una *riga* ben dritta e fedele di *data* lunghezza, sempre appoggiata coi due punti estremi ai suoi lati, e segnando lungo la costola o taglio della medesima quante mai si vogliano rette col *lapis-piombino*, inchiostro o altro mezzo colorante consimile; giacchè queste col loro incontro, quante più fossero, traccierebbero un Poligono circoscritto all' Ipocicloide, tantopiù prossimo a combinare pel maggior numero de' suoi lati col perimetro della Curva inscritta, nel quale appunto terminerebbe, posto che si potesse costruire difatto un Poligono *infinitilatero*. E da ciò risalta mirabilmente la stretta corrispondenza della speciale Ipocicloide, di cui si parla, colla Parabola Apolloniana (Fig. 78.); poichè si sa che ancor questa si può disegnare dentro d' un angolo MAQ mediante le rette FG, DE, BC, ec., in modo tale guidate, che $AF + AG = AD + AE = AB + AC = AM = AQ$ ossia sempre *costante*, le quali rette formano anch' esse colle mutue loro intersezioni un Poligono circoscritto alla Parabola MNIPQ col suo vertice in I punto medio di DE, o volendo che il vertice più o meno s' accosti all' impostatura M (Fig. 79.), col dividere in ragion *reciproca* per via di parti *aliquote* i due lati MA, AQ dell' angolo MAQ, e guidare le rette FG, DE, BC, ec., tutte tangenti della porzione della parabola iscritta, ed agevolmente così diseguabile MNIPQ mediante la proporzione *continua* AQ : AG : AX ∺ o l' altra AM : AF : AT ∺, che fissa ogni punto N di *contatto*: lo che fu già dimostrato, non da Torricelli e da Grandi nei loro MSS. lasciatici (com' è opinione d' alcuni), nè da De la Hire, che per provare sì fatto assunto d' agevolissima conclusione *sintetica* impiegò l' Algebra e perfino la Regola nota de' *massimi* e *minimi*, nè tampoco da Perelli (siccome altri s' indussero a giudicare), ma da Apollonio nella Proposizione XLI. (*Teorema* 41.) del Libro III. delle sue *Coniche*, ripetuta ancora magistralmente coi medesimi termini nella Proposizione XIV. del Libro V. da Simson. Quello poi, che dee più sorprendere a mio sentimento gli amatori delle verità matematiche, si è che la retta *costante* BC (Fig. 76.), la quale passeggia dentro i lati dell' angolo retto MAQ ed è sempre tangente dell' Ipocicloide suddivisata, fa parte del conosciuto Istrumento o *Compasso Ellittico* (come può riscontrarsi in Stevino, Schooten e molti altri Scrittori d' *organica* Geometria); di modo che prolungata comunque, per esempio in U, o raccorciata, come in u, venga a segnare il Quadrante d' un' Ellisse conica $qU\beta$, i cui semiassi, *trasverso* e *conjugato*, $Aq = BU$, $A\beta = CU$, ossia $Aq' = Bu$, $A\beta = Cu$: perocchè condotta da U la retta Uy paralella ad Aq, e da A l' altra Am a BU, sappiamo dagli Elementi dovere esser sempre $Am = CU$, cioè *costante*, laonde il punto m sulla circonferenza del Quadrante di Cerchio $nm\beta$, e di più $Uy : ym :: BU : Am \,(= An' = UC = A\beta) :: Aq : A\beta = An$; proprietà cognita dell' Ellisse. Nè quì finisce l' analogia tra l'Ipocicloide particolare segnata e l'Ovale medesima Apolloniana. Riluce questo ancor meglio e più interessante diventa avvertendosi come quel *Compasso* medesimo, il qual co' suoi punti innumerevoli, o dentro l'angolo o fuor dell'angolo retto, va descrivendo i Quadranti d'infinite Ellissi, varie di proporzione e grandezza, e differisce dal *Compasso* del Circolo, perchè fermo a pari di esso nella misura cambia continuamente di *centro*, e da quello generatore dell'antica Concoide, perchè cambiando alla pari di lui o di *centro* o di *polo* non muta eziandio di lunghezza, infra la *serie* immensa di tante Ellissi, ora *allungate* ed ora *compresse*, tra i limiti della retta QA come Ovale infinitamente *oblongata* e dell' altra AM come infinitamente *schiacciata* quanto alla sua parte interna BC, descrive col punto medio Y della porzione *costante* BC rammentata un Quadrante di Circolo ossia d'Elisse equilatera ΩYIΨΦ: generazione bizzarra e curiosa sì per il duplice moto di rotazione e traslazione della *Riga* BC, che mirabilmente promiscuati fanno un viaggio *composto* come il facilissimo del *Compasso* ordinario AY' girante attorno di A, sì ancora attendendo alla stretta unione di questo Circolo generato dal punto, che biseca la retta BC, mentre dessa ad un tempo è sempre in contatto con una Curva parimente generata da un Cerchio di raggio sudduplo ruotante con movimento *composto* dentro d' un altro di raggio doppio rispetto al Quadrante indicato. Contuttociò, a parer mio, comparisce più degno d'esser notato con qualche specialità il particolare seguente, che consiste nell'osservare che ormai sapendosi dai Geometri come le Curve generate per *evoluzione* mediante un *filo* equivalendo alla loro generazione mediante una retta *rigida* d' *invariata* lunghezza, che senza d' alcun *strisciamento* o moto *radente* stia sempre in contatto coll' *evoluta*, e d' altra parte non ignorandosi dopo i saggi somministratine dal prelodato Giovanni Bernoulli la generazion delle Curve per via di solo movimento *trattorio* senza mistura di *ruotamento*, la nostra Ipocicloide presenti nel generare l' Elisse (a differenza della sua vera *evoluta*) *composizione* e mescolanza sì fatta di rotazione e strisciamento ad un tempo della retta *rigida* generatrice e tangente CB, che la di lei *retrocessione*, la quale è in aggiunta alla rotazione e al contatto, sia tanta precisamente, quanta la metà di lunghezza della retta medesima genitrice; ond' avvenga che tra *retrocessione* e *ruotamento* in questa maniera *composta* di generar con due moti diversi un' Elisse per mezzo di special *svolgimento* quella ragione d'*egualità*, che sarebbevi tra l'*evoluta* solita QPINM ed il *filo*, o la retta *rigida* stata sempre a contatto con essa, ricomparisca in qualità di ragion *sesquialtera* per rapporto alla tangente *perpetua* CB nel caso della particolare *evoluzione* ad un tempo e *retrocessione* accennata; cioè all' occhio del Geometra comparisca di nuovo in proposito del movimento *composto* di cui parliamo, la medesima *sesquialtera* proporzione, la quale ha fatto così bella comparsa nelle surriferite Proposizioni.

TEOREMA.

Due tensioni o altre Forze simultanee comunque diseguali sollecitanti un punto dato, ed in *quantità* e *direzione* rappresentate da due linee-rette disposte in qualunque angolo, sono equipollenti ad una tensione o Forza unica rappresentata parimente in *quantità* e *direzione* dalla diagonale di quel Paralellogrammo o dal terzo lato di quel Triangolo, che abbia per lati le due rette rappresentative, sotto l' istesso angolo nel primo caso o suo supplemento nell' altro, e passi pel punto indicato.

(Ciò è l' istesso che dire „ Tre Forze, le quali agisca-
„ no a un tempo contro d' un medesimo punto, si fanno
„ mutuamente equilibrio tosto che siano *proporzionali*, e si
„ conformino nella lor *posizione* ai tre lati d' un qualun-
„ que Triangolo rettilineo, e quando una sola di esse agisca
„ in direzione diametralmente contraria a quella, che ne
„ rap-

„ rappresenta il valore „. Tale è l' esposizione geometrica, che primi ne fecero Guidubaldo e Stevino, applicando questo Teorema fondamentale massimamente alla Spartostatica ossia Statica *funicularia*. E colla sua solita perspicacia Monge in ultimo luogo ha posta saggiamente a profitto questa conseguenza immediata del Teorema medesimo per dedurre dalla sola conoscenza della direzione della *risultante* di due Forze anco il valore della *risultante* predetta. Nè importa soggiungere, che *determinata* tal *risultante* o *composta* di due date Forze *componenti*, ella possa dipoi a piacimento risolversi o *decomporsi* in due altre Forze, colla sola *condizione* che queste siano rappresentate di quantità e direzione da due rette-linee, le quali sian lati d' un Paralellogrammo o Triangolo, di cui la Forza unica *data*, che similmente rappresentasi da una retta, tenga luogo di diagonale o di terzo lato: così che il Problema *inverso* ossia della *decomposizione* venga ad essere *indeterminato* a differenza del Problema *diretto*, e quale appunto sarebbe quello *inverso* dell' equilibrio di tre Pesi sollecitanti una Leva essendone *dato* uno solo, e *date* le distanze dal fulcro. Non fa di mestieri tampoco notare come trovata la *risultante* di due Forze, coll' istesso procedere si trovi egualmente di tre, quattro, cinque, ec., in qualunque numero, direzione, e grandezza esse siano. Ciò che piuttosto bisogna avvertire, si è la suddivisione (se non necessaria, almeno opportuna per la chiarezza ed egual condotta del metodo di dimostrare) della prova seguente in due parti.)

PARTE I.

Quando le direzioni delle due Forze siano ad angolo retto.

Rappresentata nella Figura 80. due Forze di trazione dalle rette AB, AC, che faccian angolo retto BAC nel punto o vertice A, la Geometria ci assicura, che condotta l' ipotenusa BC e bisecata in I, viene ad essere la retta AI

= IB = IC. Quindi è, che stando al modo indicato nel Corollario II. dell' ultimo Lemma (un saggio del quale in proposito di Leve e Bilancie può riscontrarsi nei Scritti di Lorenzini, Grandi e Fontana), se intorno ad AB, AC come diagonali si descriveranno i due *Rombi* ADBI, AECI (cioè il medesimo *Rombo*, ma replicato e disposto attorno di I sopra BC, prima col suo angolo ottuso AIB, poi coll' acuto *supplementare* AIC = DAI), i due loro lati eguali AI coincideranno in un solo, mentre gli altri due AD, AE parimente eguali saranno a causa del paralellismo all' istessa BIC nella medesima dirittura. Dunque pel Lemma suddetto la Forza solitaria AB equivalendo alle due combinate AD, AI, e l' altra AC alle due AE, AI, e distruggendosi per evidenza *intuitiva* le due direttamente contrarie ed eguali AD, AE (Corol. IV. dell' Assioma), la *risultante* delle quattro Forze AD, AI, AE, AI, o sivvero delle due date AB, AC, viene a residuarsi in AI + AI = 2AI, ossia nella *diagonale* AO del Rettangolo ABOC, siccome dovea dimostrarsi.

PARTE II.

Quando le direzioni delle due Forze siano ad angolo obliquo.

Sono quattro i casi diversi quì rilevati dalla specialità delle Figure 81. 82. 83. e 84., che per la corrispondenza delle medesime lettere s' intendono tutti egualmente mediante l' istessa dimostrazione. Rappresentate al solito le Forze dalle due rette AB, AC, disposte ad angolo non-retto quanto alla respettiva lor *direzione*, e guidata BC che ne congiunga gli estremi, la Geometria suggerisce, che a fine di descrivere intorno AB ed AC come diagonali due Rettangoli, i quali abbian due lati AD, AE eguali nella medesima dirittura, e gli altri due AS, AT giacenti sulla stessa retta, faccia d' uopo bisecare in I la linea condotta BC, e segnare la diagonal-AIO del Paralellogrammo ABOC; perchè essendo *identici* allora i due subcontrarj Triangoli ortogonj BIT, CIS, ne segue $TB = SC$ (con di più $TI = IS$, $OI - TI = OT = IA - IS = AS$), e perciò ancora $AD = AE$ nei due Rettangoli ADBT, AECS riferiti di sopra. Ora in virtù della I. Parte di già dimostrata la Forza AB equivale alle due AD, AT, e la Forza AC alle due AE, AS: dunque la *risultante* delle AB, AC sarà l' istessa di quella delle quattro Forze AD, AT, AE, AS; cioè distruggendosi AD, AE come direttamente contrarie ed eguali (l. c.), la *risultante* delle AB, AC si fa equipollente ad $AT + AS = AT + TO = AO$ (nelle Figg. 81. 82.), $= AT - AS = AT - TO = AO$ (nella Fig. 83.), $= AT + o = AO$ (nella Fig. 84. ov' accada che CAI sia un angolo retto), ch' è quanto dire alla *diagonale* AO del Paralellogrammo *generale* suddivisato.

COROLLARIO I.

Facile è adesso in tutte non solo le regolari *Asteroidi*, ma eziandio nelle Bilancie piramidate, semplici o doppie (vedansi l'Assioma, il suo Corollario I., e lo Scolio al Num. 1.), stabilire il valore della Forza *risultante* sull' ipomoclio, ogni volta che le singole eguali Forze di tensione o pressione, in vece d' essere paralelle all' *asse* del Padiglione piramidale, o perpendicolari al piano della Bilancia *a stella* (giacchè allora visibilmente, per le dimostrazioni datene ai luoghi opportuni (Corollarj VI. VII. e VIII. del Lemma del I. Articolo, la *risultante* equivale alla *somma* di tutte le Forze), siano nel piano istesso dell' *asse*, ma facciano coi *tiranti* o coi raggi qualunque angolo, purchè eguale e dalla medesima parte per ciascheduna. E difatti *decomponendo* (Parte I. del precedente Teorema) ognuna delle Forze come *diagonale* d' un Rettangolo in due, una che passi pel *fulcro*, l' altra che sia a questa normale, tutte le prime per *identità* si distruggeranno insieme e faranno equilibrio, mentre il cumulo delle seconde, equivalente al prodotto del numero delle Forze pel valore del Coseno-retto dell' angolo, che la direzione d' ognuna fa coll' *asse* della Piramide o colla perpendicolare al piano dell' *Asteroide* (posta la Forza ad ogni estremo di raggio o tirante rappresentata dal Seno-tutto) , determina la *misura* del carico sostenuto dal fulcro o ipomoclio della Bilancia . — Agevole parimente diventa mostrar l'equilibrio in una Bilancia *semplice* (Fig. 85.) quando le direzioni delle due Forze eguali e paralelle sollecitanti gli estremi A, B non siano perpendicolari alla verga della Bilancia medesima. In questo caso, se il fulcro I sia fisso, ma tale che ammetta intorno di se la rotazione *libera* della verga, o abbia sì fatto *attrito* non superabile dalla *somma* delle due Forze AS, BT, le quali agiscono nel medesimo senso e sono proporzionali ai Seni-retti degli angoli eguali OAP, QBR, che le direzioni delle date *Forze* fanno colla perpendicolare alla verga, è manifesto che succederà l' equilibrio, perchè le Forze normali AP, BR proporzionali ai Coseni-retti di detti angoli (*risolute* in Rettangoli, come sopra, le Forze intere paralelle AO, BQ) vengono ad essere eguali ed a pari distanze dall' ipomoclio ; e la *somma* di quei due Coseni o il doppio d' un solo rappresenta la *risultante* pressione normale sul fulcro. Adattasi, presupposte le *condizioni* medesime, quest' istesso discorso anco alle Bilancie *composte*, tanto *a stella*, quanto piramidali ; nè conviene fermarsi di più su tutte le altre naturalissime conseguenze di simile categoria . — Anco le Leve, o diritte o curve o piegate, sopra i diversi punti delle quali agiscano delle Forze diseguali comunque e con direzione respettiva qualunque siasi, non ammettono ulteriore difficoltà dopo la *composizione* per via di Paralellogrammi (Parte II. del Teorema p. passato), onde determinarne i casi dell' equilibrio ed il carico del punto d' appoggio. Conciossiachè di Forza in Forza *componendole* insieme col metodo superiore, debbe la *risultante* di tutte necessariamente passare pel *fulcro*, all' effetto che si verifichi l' equilibrio ; e la *risultante* anzidetta viene ad essere in ogni caso proporzionale a quella retta che in ultimo la rap-

pre-

presenti (si riscontri l' *Esempio* nello Scolio del Teorema dell' Art. I.). — Anzi, siccome è chiarissimo che rappresentando una Forza mediante una retta, questa (seguitando le traccie *elementari* accennatene da Carnot) può servir sempre di *diagonale* ad un Paralellogrammo, ch' abbia un de' suoi lati paralello ad un' altra retta *data* di posizione, mentre il secondo lato può anch'esso far l'ufficio di *diagonale* d' un nuovo Paralellogrammo, ch' abbia i suoi lati paralelli respettivamente a due altre rette *date* di posizione, ognun vede che può risolversi o *decomporsi* qualunque Forza assegnata in tre Forze parziali, di *direzioni* ciascuna paralelle a tre *assi* parimente assegnati, o ai tre lati d' un Parallelepipedo *retto* od *obliquo*, i quali per maggior comodo è permesso supporli sempre scambievolmente normali infra loro. Nascono appunto da questa generale *decomposizione* o risoluzione le VI. Equazioni universali dell' equilibrio; III. cioè per la distruzione del *niso* al moto di traslazione per ogni verso; le III. rimanenti per l' elisione dei *momenti* di rotazione parimente per ogni verso: e le III. prime *ricomposte* per via di Paralellogrammi o rettangoli (come nella Parte I. e II. poc' anzi provate), quando il Corpo *rigido* di qualunque forma e figura, sollecitato da quante mai si vogliano Forze, comunque diseguali ed in qualunque modo dirette, non fosse *libero* e sciolto, farebbero colla loro *risultante* conoscere la pressione o tensione sopportata dal punto d' appoggio, per cui, a scanso di meno semplicità, supporrebbesi che passassero i tre *assi* sunnominati. Quindi ne siegue, che il compimento della Statica (e perciò ancora della Dinamica mercè del *Principio* di Fontaine, che precedette quello quasi sincrono di Dalembert), e vale a dire la determinazone dello stato di riposo d' un Solido, o libero o impedito, e animato da qualsisia numero e qualità di Forze, riducibili tutte all' effetto stesso delle *trazioni*, cioè lo scioglimento del Problema, che conta per Epoca l' applicazione ad ogni Sistema di punti coesi delle Regole solite d'equilibrio, e si conobnobbe in principio col nome di *Precessione degli Equinozj* (rispetto al quale Dalembert medesimo pretese il primato sopra Euler seniore, come in cambio che a Gian Alberto suo figlio son oggi d' accordo i Geometri, che debbasi a Segner la scoperta dei tre *assi* almeno, d' *equilibrio* de' *momenti*, mutuamente normali in qualunque Corpo), dipenda senza il bisogno d' altro subalterno soccorso dalla sola *Libra* o Bilancia, o sivvero in termini *puntuali* dalla considerazione separata dei due movimenti di *traslazione* e *rotazione*, che tampoco non isfuggì ai più antichi Scrittori della Meccanica, per quanto risulta da un passo celebre del *Proemio* al Libro VIII. di Pappo, interpetrato sulla lezione del Codice Vaticano. Tanto è ciò vero, che quei Matematici, come per esempio Laplace, i quali all' oggetto di determinare la *legge* dell' equilibrio nel Vette *diritto* l' han fatta nascere dall' ipotesi fittizia d' un Vette infinitamente-poco *piegato*, dovettero finalmente appoggiarla, sull' esempio di Giovanni Bernoulli, ad un secondo *principio*, cioè alla *composizione* e *decomposizione* delle Forze; e gli altri che v' impiegarono, come in ultimo Prony, le velocità *virtuali*, non poterono a meno di non ricavarne la prova del presupposto paralellogrammo o triangolo delle Forze, sul modello istesso preso da Varignon per fondamento (sebben debolmente assicurato e per lo più col viaggio solito della *Formica* ec.) dapprima della sua *Memoria sopra le Troclee*, dipoi del *Progetto*, e quindi della *Nuova Meccanica*. David Gregory, che tentò di ridurre il Paralellogrammo o Triangolo divisato all' istesso caso d' una Leva *diritta* sollecitata da due Forze convergenti, riescì a parer mio nel dare il *saggio* preliminare dell' eleganza e semplicità di quella dimostrazione usata molto dopo da Monge (vedasi il l. c. nel Corol. VI. del Lemma del I. Articolo), il quale non presupponendo come il Geometra Inglese (abbenchè adoperasse questa supposizione *tacita* per assegnare dipoi la quantità della *risultante*) che ognuna delle tre Forze facesse le veci d' ipomoclio rispetto alle due rimanenti, immaginò (Fig. 86) che le due trazioni AB, AC fosser due Forze perpendicolari ai respettivi bracci IP, IO d'una Leva *inflessa* PIO, mediante l' idea d' un arco annesso di *troclea* OD cambiata in *diritta* PID, così che l'equilibrio non mai potesse accadere se la direzione della terza Forza AI non tagliava in modo PID, che AC : AB :: IP : ID = IO, cioè (io soggiungo) che il Triangolo CAI = BAI, ossia BI = IC, o piuttosto se AI non combinava colla *diagonale* di quel Paralellogrammo, che avesse per lati AB, AC, o se condotta a seconda della Teorica d' Huygens la retta qualunque RS inclinata egualmente alle *direzioni* delle due Forze, dessa non si divideva in maniera nel punto I, che AC : AB :: RI : IS, onde conseguirne la *posizione* di AI *risultante*. — Assai meno felice fu presso gli antichi ed alcuni de' moderni Meccanici la deduzione *immediata* del valore della Gravità *relativa* in un Piano declive dai *momenti* del Vette. Pappo, scrittore del IV. secolo sotto Teodosio (avvengachè altri Storiografi meno critici sbagliandolo per un *ermetico* lo faccian fiorire circa l' anno DC. XXXVIII.), il quale nell' ultimo Libro delle sue *Collezioni* ha spiegato tutto quello che possedeva la Scuola celebre d'Alessandria in proposito delle *Potenze meccaniche*, diede un falso rapporto della gravità *assoluta* alla *relativa* d'un Corpo, che deggia equilibrarsi sopra un Piano inclinato, impiegando i *momenti* di due bracci di Leva. Stevino, di cui fu seguace Herigon, e che prevenne Galileo sull' eguale velocità dei Gravi più o meno densi cadenti dall' alto, contra gli insegnamenti Peripatetici, senz'adoprare il Vette dee dirsi il primo, che somministrasse il vero rapporto di quelle due Gravità; ma (sebbene Montucla lo taccia e lo avverta Lagrange) per mezzo dell' applicazione indiretta ed estrinseca d' una catena *senza fine* pesata sui due lati d' un Triangolo ortogonio *particolare*, uno doppio dell' altro, ed in sequela dell' impossibilità presupposta del *moto perpetuo*. Reca assai maraviglia, che Galileo, il quale dopo Tartaglia fondò la Balistica, sostenuta affatto sul principio *unico* del movimento *composto*, e fino del M. DC. IX. (come manifesta un suo MS. poco fa pubblicato) era in possesso d'un Teorema generale intorno alla *composizione* dei moti *risultanti* da due o più Forze simultanee, analogo a quello espresso in ultimo da Carnot nell' Opera egregia sulla *Correlazione delle Figure*, esitasse lungamente per la maniera di condurre a prova completa la Teoria de' Piani inclinati. Difatti ora nei suoi *Dialoghi* equipara, per dimostrare la proporzione della Gravità *assoluta* alla *relativa*, i profili de' Piani declivi alle tangenti d' una Periferia circolare a fin d' applicarvi il giuoco dei bracci del Vette come in un Timpano o Ruota-a-tamburo; ora appella ad un *Postulato*, ch' è petizion di principio; ora richiama al *Centro di gravità*, che non può scendere in caso dell' equilibrio; ed or finalmente s' affida, *decomponendo* per fino il viaggio d' uno de' Gravi, alle velocità *virtuali*. Persuaso com' egli era dall' uso fattone per i Projettili del modo di *comporre* e *decomporre* le Forze, poteva subito sciogliere in Paralellogrammo o Triangolo, come nelle sue Trajettorie accadeva, la Forza intera di gravità, e conseguire col mezzo di questo naturalissimo metodo l'avanzamento spedito dell' ultima parte, che rimaneva alla Statica, strettamente legata colla teoria della Vite e del Cuneo. Mentre ciò fosse avvenuto, non sarebbero forse insorte tante dubbiezze de' Cartesiani contro della *composizione* e *risoluzion* delle Forze; nè Borelli e altri anonimi, ripresi sotto cortina a ragione da Varignon, non averebbero equivocato su questo Teorema fecondo e importante della Meccanica, e tanto chiaro che Hamilton non ebbe nemmeno premura di darne prova. Forse Nuguet, che cercò vilipendere il *Progetto della nuova Meccanica* di Varignon, sarebbe rimasto in silenzio; Richtero non sarebbe comparso in pubblico per essere virilmente confutato da Zanotti e da altri; e la Storia delle Matematiche non conterebbe nei suoi Fasti polemici tante *eristiche* esposizioni, quante si leggono sull'argomento de' *momenti* dei Gravi sopra un Piano inclinato negli Scritti de' due Vanni ni (Giovan Francesco e Giuseppe), del Kochanski, Leibnitz, Giacomo Bernoulli, Pardies, Marchetti, Giordani, Tamburi, Porzio, Grandi, Fromond, Riccati, ec., i quali o con dei sottili sofismi, vituperati a ragione da Varignon, seguitarono l' error degli antichi considerando il Piano inclinato per Vette, o con animosa parzialità han combattuto, o con vigorosi argomenti han difeso la dottrina delle Forze *composte*, o tutto insieme l'edificio attaccato di fronte (massimamente dal penultimo dei rammentati) della Meccanica *razionale*. Egli è poi di per se manifesto, che dalla *decomposizione* della Forza di gravità, coacervata con qualunqu'altra sollecitante un Corpo *appoggiato* in qualsisia numero di punti sopra più Piani *inclinati* o sopra una Superficie *curva* (i cui piani *tangenti* subentrano ai primi) nasce senz' alcuna difficoltà, fuori che dell'Analisi, lo scioglimento del Problema *generale* della pressione sopportata dagli *appoggi*, tenendo ferma la *condizione* della perpendicolarità su ciascun Piano, o attuale o tangente, della Forza *parziale* che passa pel *centro delle medie distanze* del Corpo e per ogni punto d' *appoggio*, in aggiunta alle altre *condizioni* solite dell' equilibrio, ed applicandovi (quando pur piaccia) nel rimanente il metodo esposto dal Corollario VI. del Teorema dell' Articolo primo.

COROLLARIO II.

Sopra tutto però dalla maniera spiegata di considerar le *trazioni* associate ai *momenti* nel Vette si derivano facilmente come da vero lor fonte i Teoremi di già noti Hugeniani (vedasi il Corollario I. premesso), ed i più universali di questi, che contemplarono Lhuilier, Carnot, e varj altri dietro le proprietà *geometriche* dei Poligoni rettilinei giacenti in uno o più piani, e presero origine dalle speculazioni sagaci di Roberval intorno alla Piramide *statica*. Primieramente attendendo alla Figura 87. si dimostra con più generalità di quello che si facesse nel particolare della 69. (Corol I.

del Lemma precedente), che tre Forze in equilibrio nel medesimo piano rappresentate da AB, AC, AQ, son sempre tali che A punto o *nodo*, contro del quale esse agiscono ed ivi concorrendo si contrabbilanciano, è *Centro di gravità* dei tre punti B, C, Q ideati come tre eguali molecole *gravi*: imperocchè dovendo essere $AQ = AO$ *diagonale* del Paralellogrammo ABOC e direttamente ad essa contraria, ognun vede che $AQ = 2AI$ mentre BC resta bisecata in I; laonde A viene ad essere a un tempo *Centro di gravità* del Triangolo BQC e *delle medie distanze* de' vertici B, Q, C di tutti e tre gli angoli, che gli appartengono. Nè difficoltà maggiore s' incontra, adoperando la Sintesi geometrica, per provare la stessa affezione relativa a quattro Forze *traenti*, disposte in piani diversi e tutte concorrenti in un punto, sollecitato dalle medesime in modo, che ne risulti equilibrio. Perchè se le quattro Forze AB, AC, AD, AQ (Fig. 88.) s' equilibrano, congiunte le rette BC, CD, DB, QB, QC, QD, e formata così la Piramide triangolare BQCD, quando si divida DC nel mezzo in P, la *risultante* delle due Forze di *trazione*, rappresentate da AC, AD, viene a farsi $AR = 2AP$; e condotta BR e parimente questa bisecata in S, la *risultante* di AB, AR (cioè di AC, AD, AB) viene ad essere $2AS$ e situata nel piano medesimo del Triangolo BAP. All' effetto dunque che la quarta Forza rappresentata da AQ sia in equilibrio colle tre prime fino ad ora considerate, è di mestieri che quella sia in dirittura di AS e passi per un punto O di BP, la quale divide in due parti eguali il Triangolo CBD base della rammentata Piramide, ed è di più necessario che $AQ = 2AS$; laonde, siccome in virtù della bisezione avvertita di AR, BR in P, S, guidando PS non può a meno d' essere paralella ad AB, abbiamo $SO:AO::PS:AB::RP:RA::1:2$, o sivvero $AS:AO::3:2$, e perciò $2AS = AQ:AO :: 6:2 :: 3:1$; lo che vuol dire il punto o *nodo* A *centro di gravità* della Piramide triangolare BQCD, ossia *centro delle medie distanze* dei quattro vertici de' suoi angoli *solidi* B, Q, C, D, immaginati come se fossero quattro eguali molecole *gravi*. Così andando più avanti del ritrovato unico di Roberval, se quattro Forze di *trazione* rappresentate (Fig. 89.) da AB, AC, AD, AE, stando i punti B, C, D, E sì o nò in un medesimo piano, debbano essere bilanciate da una quinta Forza, proporzionale a una retta che parimente la rappresenti, ognun concepisce come dividendo per metà CB, ED, in P, R, e PR in O, questo punto O sarà *centro di gravità* dei quattro punti predetti; ond' è che AM = 2AP essendo la *risultante* di AB, AC, come AN=2AR l'altra di AE, AD, e dopo prolungata AO, che in virtù delle paralelle PR, MN dividerà MN in S per metà, scorgendosi che la *risultante* delle due *risultanti* pareggiar debbe 2AS = 4AO, si fa chiaro 1. che per il mutuo equilibrio la *posizione* della quinta Forza *traente* AQ abbia da essere nel prolungamento di AO dalla parte contraria rispetto ad A *nodo* o punto di comune concorso; 2. che il valore di lei = 4AO; ed è quanto dire il punto A *Centro delle medie distanze* dei cinque punti B, C, D, E, Q nella circostanza dell' equilibrio. Coll' istessa geometrica semplicità s' arriverebbe a provare nella sua pienezza il Teorema *universale* lasciatoci senza dimostrazione da Huygens; ma giova piuttosto di ricavarne la prova dalla maniera naturalissima, ch' ho usata nel *Lemma* di questo Articolo e nelle Figure 67. e 68., di valutare cioè le *trazioni* de' *fili* come *identiche* o equipollenti ai *momenti* di braccia di *Leve*. Richiamando impertanto a sì fatto proposito tutto il già detto nei Corollarj V. e VI. del Teorema dell' Articolo I., immaginiamo un *Bilanciere a stella* comunque irregolare (Fig. 90.), ch' abbia i suoi raggi a piacimento diseguali, ed, inegualmente disposti in un medesimo Piano orizzontale, o qualunque altro siasi, cui si supponga perpendicolare la direzione delle Forze sollecitanti; e sia oltrediciò il *Bilanciere* medesimo di tal sorta, che venendo quei raggi comunemente aggravati da un Peso eguale nel loro estremo, s'equilibri sopra A suo unico punto d'*appoggio*. Egli è chiaro ro dalle cose oramai spiegate nei luoghi citati, che in conseguenza dell' accennato equilibrio il punto A debbe esser *Centro delle medie distanze* di tutti i punti o molecole considerate come egualmente gravi B, C, D, E, F, G, H, I, K, ec., sebbene unendole per via di rette il contorno o perimetro BCDEFGHIKB diventasse comunque sghembo, storto, bizzarro, misto d'angoli rientranti e salienti, in somma di qual che mai ella si fosse arbitraria rettilinea figura; esigendo così la legge invariabile dell' egualità de' *momenti* intorno ai due *assi*, ond' elidere i *nisi* o conati al movimento di rotazione. Ora se col mezzo di troclee il *momento* d'ogni braccio del *Bilanciere*, il qual *momento* è proporzionale e rappresentabile dalla lunghezza del medesimo braccio, si trasfonda intero in un *filo* paralello d' egual lunghezza, onde tutti i *fili* concorrano superiormente nel *nodo* S, che assuma le veci di A, e si sciolga ad un tratto la collegazione dei raggi del *Bilanciere* predetto, di modo che questi AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AK, a fine di lasciar agire *liberamente* i momenti dei singoli Pesi pendenti, non facciano che posar sull' *appoggio* comune senz' alcuna comunicazione infra loro, siamo allora nel caso della trasformazione del *Bilanciere a stella* in una Macchina *funicularia* raggiata, dove le Forze *traenti* il punto unico ossia *nodo* S hanno la stessa misura de' *momenti* anzidetti, rappresentata perciò dalle respettive lunghezze dei *fili* soprapposti SB', SC', SD', SE', SF', SG', SH', SI', SK', e son come quelli in perfetto equilibrio. Dunque allor quando un numero qualunque siasi di Forze proporzionali a dei raggi, tutti giacenti in un piano, stirino o premano un punto o *nodo* di comune concorso e si facciano mutuamente equilibrio, quest' ultimo punto non può non essere il *Centro di gravità* o *delle medie distanze* dei primi punti indicati: *condizione* immancabile onde a vicenda si contrabbilancino le multiplici Forze medesime, e producano quello stato, che dicesi di riposo *coattivo*. A questa Macchina appunto di facilissimo concepimento ed esecuzione, ch' è *ponderaria* e *spartostatica* a un tempo, ed unisce insieme o immedesima *leve* e *trazioni*, *momenti* di Vette e di Forze *composte*, e quando pure si voglia identifica nell' un caso e nell' altro le *Velocità virtuali*, io mirava nello Scolio dell' ultimo Lemma, ove promessi di decifrarla. E mentre nell' eseguirla si congegnasse da bravi Artisti in maniera, che non solamente gli angoli centrali in A e S potessero più o meno aprirsi, ed a talento portarsi più o meno indietro i Pesi eguali posti agli estremi de' raggi, ma sopra un *asse* verticale eziandio potessero muoversi i raggi coi loro annessi, onde variare in cento modi diversi le *situazioni* dell' equilibrio, questa tal Macchina allora potrebbe con tutta ragione chiamarsi in un Museo di Fisica Sperimentale il vero *Pancration*, come quella su cui effettuar si potrebbero col massimo compendio e chiarezza l' Esperienze della Statica *in genere;* imperocchè anco il Piano-inclinato (e perciò la Vite) ed il Cuneo si sostanziano nella misura d' altrettante *tensioni* di corde o di *fili*. Nè al Geometra può mai costar pena l' argumentare dal sin qui detto come ideata quella universal Macchinetta, si provi subito per qualunque Sistema di punti, situati anco fuori del medesimo Piano, il Teorema espresso di sopra; e ciò in virtù della solita egualità de' *momenti* attorno a tre *assi* (come da prima intorno di due), conseguenza indispensabile e circostanza concomitante dell' equilibrio. Aggiungasi, che le *trazioni* o qualunque siano altre Forze essendosi poste in considerazione superiormente come generate e misurate per mezzo d' *azioni* tutte infra loro eguali, ma sollecitanti perpendicolarmente dei bracci di *Leve* proporzionali alle prime, ne deriva tosto la prova della nota generale Equazione delle *velocità virtuali* comunque espresse $Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \text{ec.} = o$, $P' + P'' + P''' + P^{\prime v} + P^{v} + \text{ec.} - P = o$, $P'y' + P''y'' + P'''y''' + P^{\prime v}y^{\prime v} + P^{v}y^{v} + \text{ec.} - Py = o$, $aPx' + bPy' + cPz' + \text{ec.} = o$; poichè in sostanza questi *momenti* sono allora i medesimi degli *antichissimi* di già contemplati e dimostrati nel Vette. Non mancherò d' avvertire tampoco, che quando non avessi avuto, a riguardo dell' ordin *sintetico*, l' oggetto di sminuzzare nei suoi diversi accidenti la Teoria delle Forze *composte*, io poteva per mezzo della Figura 91. immediatamente e direttamente ridurla ad una sola *generale* Proposizione: conciossiachè, se la *trazione* AB e l'altra AC sotto qualunque angolo sono la stessa cosa di due Forze F, F, eguali, perpendicolari, e paralelle, poste agli estremi de' bracci della Leva angolare BAC, la *risultante* di quelle due Forze 1. debbe agire in I punto medio di BC; 2. ha da essere 2F ossia il doppio di valore d' una di loro; 3. questo doppio non può a meno di corrispondere al braccio di Leva AI; 4. e la *risultante* d' ambedue le *tensioni* viene a farsi così 2F.AI=F.AO, cioè in equilibrio con F.AO', posta AO' = AO *diagonale* del Paralellogrammo BACO, delineato nella Figura.

COROLLARIO III.

Che si *compongano* e *risolvano* i *nisi* simultanei alla rotazione dei Corpi *rigidi* intorno a due o più *assi* nel medesimo modo e coll' istessa *legge* di tutte le altre Forze consimili, le quali di qualunque indole siano e sotto ogni nome con cui siamo soliti d' appellarle, possono sempre idearsi come se agissero per mezzo di *fili* e di *pesi*, egli è di così facile ed evidente divisamento, ch' io non so persuadermi nè del dubbio, nel quale fosse già Dalembert a questo proposito presso la metà del secolo scorso, nè tampoco che assai tardi fossero i primi a contemporaneamente accertarsene Frisi e Perelli. Difatti era di già noto a chiunque, che la misura del *niso* alla rotazione si rappresentava dalla velocità *angolare* V, *v* moltiplicata nella respettiva distanza dal proprio *asse*, come si ha dai *momenti* (Scolio del Lemma dell' Articolo II.) dell' *antichissima* Leva. Dunque all' effetto di *generalmente* applicare questo *principio* al caso presente posto nella Figura 92., che un Sistema di punti tenda insieme a ruotare intorno dell' *asse* AB colla velocità *angolare* V per un verso, ed intorno di CD colla velocità *angolare* v per il senso medesimo o pel contrario, nel piano dei due *assi* (i quali s'incontrano tutti nel *centro delle medie distanze* quando non attendesi al moto di traslazione) e dentro dell' angolo DSB, o del *supplementare* ASD, vi debbe essere per necessità un punto O (e dietro lui in virtù della Geometria *elementare* tutta la retta ESOF), rispetto al quale i due *nisi* opposti ed in direzione diametralmente contraria (perchè normale e l' una e l' altra all'istesso Piano ove sono le rette ASB, ESF, CSD) mutuamente s' elidano; e sarà quello per cui, calate OI, OG normali ai due *assi*, si verifichi $V.OI = v.OG$, ch' è appunto la *Legge* del Paralellogrammo (ved. il precedente Corollario I.) delle Forze *composte*. Se dunque ESF è il nuovo *asse* unico di rotazione, ognun vede che alzata ST perpendicolare al piano de' primi due *assi*, e presa ST eguale all' *unità* di raggio, che serve di *modulo* alle velocità *giratorie*, e condotta MSN normale ad ESF nel piano suddetto, e riportata sul piano istesso in *projezione* ortografica non *degradata* a motivo del paralellismo de' piani, la velocità nuova e il viaggio del punto T, dovrà quello trovarsi nella direzione SX perpendicolare a SF; cioè, guidate SY perpendicolare a SB, SZ perpendicolare a SD, onde nasce l' angolo XSY = OSI, XSZ = OSG, e da un punto L di SX condotte LR, LP normali a SY, SZ, verrà a formarsi il Quadrilatero RSPL simile e similmente disposto rispetto all'altro ISGO, ed in conseguenza $LR:LP::OI:OG::v:V::SZ:SY$, che dimostra ad un tempo la *direzione* e *valore* di SX nuova *velocità rotatoria* come *diagonale* di quel Paralellogrammo, il quale abbia le due rette già date SY, SZ per *lati*, richiamando a tal uopo le superiori Teorie.

Scolio finale.

Parmi così d' avere appieno compiuto e col corredo di poche Proposizioni da scegliersi agevolmente come sole dicevoli all' uso degli *Elementi* (a differenza del complicato metodo che si legge nelle *Memorie* di Landen) l' argomento propostomi, qual era quello di dimostrare, che la Meccanica potesse pretendere all' *evidenza* medesima, di cui gode la Geometria, nei suoi *principj* e nelle sue conseguenze. Bossut con ragione si espresse „ qu'on devroit faire tous ses efforts pour repandre la plus vive lumière à l'entrée des „ Sciences, & pour en rappeler, autant qu'il est possible, „ les principes fondamentaux à l'uniformité „. E questo massimamente esigevalo la Scienza dell' equilibrio e del moto; giacchè il Sistema dell' Universo non è a sentimento di Condillac „ qu'une heureuse application des *principes plus simples* de la Méchanique „. Quanto egli è indubitato il concetto di Wolff — *theoria Staticae atque Mechanicae apud veteres fuit valde imperfecta* —, non lascia però d' esser vera altrettanto la proposizione di Courtivron „ La Statique a été „ cultivée des les temps les plus reculés, & pourroit faire „ quelque progrès *avec la seule Géométrie* des anciens „. Non può negarsi all' Analisi, ch' essa non abbia rischiarati molto i segreti, che la Natura nascondea nel suo seno, quasi prendendo a diletto, come disse Giovanni Bernoulli, d' operar sempre per via d' *equilibrio*, di *centro di gravità*, di *momenti*, e di *vetti*. Bisogna pur confessare (lo avvisa Legendre) che „ la consideration des *Fonctions* . . . . . . „ a été déjà employée avec succès pour la demonstration „ des *principes* fondamentaux de la Méchanique „. Ma dall' altra parte Dalembert ci ammaestra come „ En vain l'expe„ rience nous instruira-t-elle d'un grand nombre de faits: des „ verités de cette espece nous seront presqu'enticrement „ inutiles, si nous ne nous appliquons avec soin à en trou„ ver la *dependance mutuelle*, à saisir autant qu'il est possi„ ble, le *tronc principal* qui les unit, à decouvrir même „ par leur moyen d'autres faits plus cachés, & qui sem„ bloient se derober à nos recherches „. Quest' istesso Geometra insieme e Filosofo aveva impiegata più volte la fecondidità ed influenza del Principio di *simetria* nella Statica, e l' aveva perfino introdotta nella Dottrina delle *refrazioni* de' Corpi. Animato dal suo buon successo, e richiamandomi a memoria che tutti i monumenti dell' Antichità fino dai remotissimi tempi Etruschi, o in Gemme o in Bronzi o in Bassirilievi o in Medaglie, rappresentavano insieme come sincrone e combinate *Bilancia* e *Stadera* col fulcro o equipondio scorrevole, ora figurato in testina di Giunone, or di Giano, ora d' Ercole, or di Mercurio, Dei de' pesi, delle monete e commercio, per quanto abbiamo segnatamente da Plauto, Plutarco, Isidoro, e Ateneo, ed in oltre osservando che i vocaboli di *Librà*, *Trutina*, *Libella*, *Statera*, e gli altri *Libripens*, *Ponderarius* presso gli antichi Classici e Lessicografi erano di sinonimia perfetta e s' intendevano sotto l' istesso significato, mi venne fatto di ravvisare che Bilancia e Vette dovessero essere la cosa medesima, e che la scempia o a due sole braccia (Libra naturale, nell' infanzia delle Società adoperata dall' uomo ad imitazione della rozza pratica primitiva di contrappesare colle proprie mani due merci da permutarsi) dovesse avere una rassomiglianza ed analogia, occulta sì, ma più ridondante ed estesa di quella, che comunemente si giudica, colla Leva. Una Lumiera pendente dalla soffitta del mio Gabinetto di studio, risvegliò le mie prime idee coll' accennarmi l' esempio di Bilancia a più braccia, e mi diede ad un tempo il presentimento, che coltivando più di quello che s' era fatto fin quì la geometrica *elementare* Teoria de' Poligoni regolari, fossero non che cognate ed affini, decisamente *identiche* Bilancie, Leve, e Forze comunque coacervate e *composte*. Nè per questo genuino racconto venga mai in mente a taluno, ch' io voglia paragonare il mio caso alla lampana di Galileo, al pomo di Newton, o alla podagra di Brown. Sebbene non possa mettersi in dubbio, che tutto il nostro sapere null' altro sia che un complesso in sostanza di Proposizioni *identiche* sotto diversa forma enunciate, contuttociò dubitando d' essere incorso ancoco in qualche mancamento ed inavvertenza nella gran copia delle applicazioni dirette e indirette de' miei principj, mi riconosco troppo inferiore ai sommi Genj testè mentovati per non dover anzi temere il giusto rimprovero

. . . . *Tu ne divinam Aeneida tenta?*
Sed longe sequere, &. vestigia pronus adora.

SUL

PRETESO MODERNO RIPRISTINAMENTO DEL GENERE ENARMONICO DE' GRECI

MEMORIA

Di Giambatista Dall' Olio

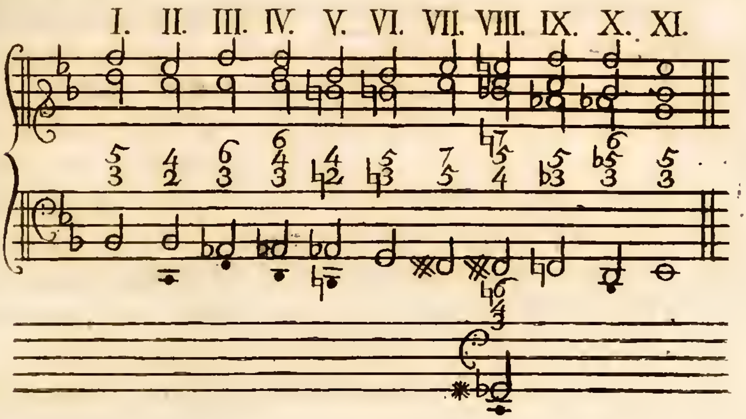
Presentata da *POMPILIO POZZETTI*

Il dì 27. Dicembre 1802.

Il Professore di cembalo e di contrappunto Giambatista Bortolani, scolare del conte Giordano Riccati, avendo veduto nella seconda parte d'un'aria del celebre Jomelli un passo di cui non gli era riuscito di trovare la spiegazione nel trattato inedito di contrappunto dello stesso Riccati, ricorse al Maestro per istruzione. Soddisfece questi alla dimanda dello scolare con una specie d'esultanza credendo d'aver rilevato che era riuscito a Jomelli di trovare il modo di mettere magistralmente in pratica l'antico genere enarmonico de' Greci. Espresse egli il suo sentimento in una lettera inserita nel tomo decimonono della *Raccolta Ferrarese di Opuscoli Scientifici e Letterarii* stampata in Venezia dal Coleti: e poichè Giordano Riccati è giudicato maestro sovrano di teoria musicale, il progresso delle Scienze, e il depuramento delle umane cognizioni ricercano che dove abbia egli preso abbaglio, se ne renda avvertito il pubblico, affinchè l'autorità d'un uomo grande non tragga altrui in errore.

Nella citata lettera, Riccati analizza il passo di Jomelli in questione, riportandone la sostanza in lettere e in cifre:

per maggior intelligenza delle quali io ho ridotto colla più scrupolosa esattezza e fedeltà in note cifrate, e in partitura il passo medesimo nella seguente maniera.



Sopra il suddetto riportato passo Riccati dice che Jomelli, dopo aver fatto transito al tuono *ut* di terza minore (subordinato al maggiore di *mi bimmolle*) al qual tuono di *ut* minore appartengono i tre accordi marcati V, VI, e VII, ha fatto succedere a questo settimo accordo l' altro marcato VIII, che Riccati chiama ignoto, e che, a sua asserzione, sembra a prima vista ripugnante ed assurdo. Egli, fatto riflettere che nei gravicembali un tasto solo serve al *fa diesis* ugualmente che al *sol bimmolle*, asserisce che Jomelli ha bensì tenuto fermo il *fa diesis* in vece di servirsi del *sol bimmolle*, ma che in sostanza l'accordo marcato VIII si trasforma in quello che io nell' esposta figura vi ho espresso al di sotto, e marcato con asterisco, portante l' accompagnamento di terza maggiore, e di sesta superflua: e suggiunge che un tal accompagnamento conviene al tuono minore di *si bimmolle*, e che deriva dal fondamentale *mi* di terza diminuita, e quinta minore, che ha per base la quarta corda artificiale del detto tuono. Finalmente Riccati conchiude che per aver Jomelli sostituito l' accordo marcato VII all' altro marcato VIII, ha dato *l' esempio di un uso lecito del sistema enarmonico, e che a lui si debba la lode d' averlo scoperto, e messo in pratica magistralmente. Il genere enarmonico non merita un' esclusione assoluta dal contrappunto. Gli antichi Greci hanno conosciuto ed usato un tal genere, che poscia è stato messo in non cale per la sua soverchia difficoltà. Giudicano i moderni concordemente non adattabile l' enarmonico alla nostra musica, e qualche uso sforzato, che talvolta se ne incontra, è manifestamente contrario alle leggi del contrappunto, perchè contiene un' illecita modulazione da tuono a tuono, che non sono legati da vicendevole subordinazione. Il Signor Jomelli ha evitato questo scoglio, ed ha saputo congiungere l' enarmonico colla retta modulazione da tuono a tuono mutuamente subordinati*. Ora, siffatte asserzioni a me non sembrano ben fondate.

Primieramente non parmi vero che l' accordo marcato VII appartenga al tuono minore di *ut:* esso è anzi l' accordo di settima diminuita, caratteristico del tuono minore di *sol*.

In secondo luogo, sussiste bensì che nei cembali un medesimo tasto serve al *fa diesis* egualmente che al *sol bimmolle*; ma ciò non produce la minima conseguenza nel presente caso, perchè i violoncelli e i contrabbassi, che eseguiscono le parti basse nelle arie, e di cui si servì Jomelli nel far eseguire il passo in questione, non sono nella necessità di valersi d' una sola e medesima voce per eseguire il *fa diesis* e il *sol bimmolle*, attesocchè, per essere istromenti colle voci mobili possono far sentire distintamente il *fa diesis* e il *sol bimmolle*, a differenza del gravicembalo, che per avere le voci stabili, non può far sentire nè l' una nè l' altra delle dette due voci nella loro giusta intonazione, ma è costretto a valersi per tutte e due d' un solo tasto, che non dà precisamente la voce nè del vero *fa diesis*, nè del vero *sol bimmolle*. Jomelli poteva sostituire l' accordo da me segnato con asterisco a quello che è marcato VIII, se ciò gli fosse stato in piacere; ma si è voluto servire di *fa diesis* piuttosto chè di *sol bimmolle*, ad effetto di conservare il conveniente legamento d'armonia, il quale, per esser uno de' principali precetti del contrappunto, non gli poteva essere ignoto. Se egli avesse sostituito il *sol bimmolle* al *fa diesis*, come pretende Riccati, la sola nota *ut* avrebbe legata l'armonia dell' accordo VII all' accordo VIII, quando ve ne vogliono almeno due, perchè si tratta di accordi che non hanno relazione l' uno con l' altro. Oltredicciò potevà far ostacolo al Jomelli la difficoltà di trovare un corpo di sonatori che possedessero a perfezione un' intonazione sì giusta da far sentire e distinguere con chiarezza la piccola differenza che passa fra *fa diesis*, e *sol bimmolle*, la quale non è al certo un quarto di voce.

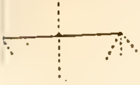
In terzo luogo, non può sostenersi che l'accordo marcato con asterisco appartenga al tuono minore di *si bimmolle*, nè che derivi dal fondamentale *mi* di terza diminuita e quinta minore: esso è con più verità un rivolto dell' accordo di settima sopra la quinta del tuono sì maggiore che minore di *fa*, avente a caso la nota *sol* alterata da un bimmolle. Oggigiorno un tale accordo viene adoprato dai migliori maestri per rendere più viva e più espressiva una cadenza in tuono di terza maggiore.

Potrebbe anche farsi il rilievo che l' intervallo di *fa diesis* a *sol bimmolle* non è precisamente il vero intervallo enarmonico de' Greci; ma, per ipotesi sebben falsa, concedasi che lo sia. Siccome Jomelli non ha fatto sentire questo intervallo, ed anzi lo ha soppresso col continuare a servirsi del solo *fa diesis*, dove, a sentimento di Riccati, poteva far seguire il cangiamento in *sol bimmolle*, ne risulta per necessaria conseguenza che Jomelli poteva bensì (sempre a sentimento di Riccati) far sentire un intervallo enarmonico, ma non ha voluto farlo. Dunque svanisce affatto il ripristinamento del genere enarmonico, preteso seguito per opera di Jomelli. Sono scorsi più di trent' anni dacchè fu composta da quel celebre maestro l' aria, in grazia della quale Riccati ha prodotto simile scoperta; ma il fatto stà che nessuno de' tanti valentissimi maestri che sono venuti dopo di lui, vi ha veduto nulla, e in nulla appunto è svanito l' esempio di Jomelli.

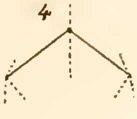
Ma vi è di più. Sia pur vero che Jomelli abbia fatto uso d' un *intervallo enarmonico*, non ne verrà giammai di conseguenza che siasi ripristinato il *genere enarmonico*. Una sola colonna non forma un peristilio, e una sola pecora non forma un gregge. Il *genere enarmonico* non era composto d' un solo intervallo: era una serie d' intervalli d' una determinata piccolezza, di cui Tolomeo e Aristosseno ci hanno lasciato i rapporti. Secondo il gusto di Aristide Quintiliano esso era il più dolce dei tre che componevano la melodia musicale de' Greci. Macrobio ci dà contezza d' ognuno di essi. L'*enarmonico*, dice egli, è andato in disuso per la troppa difficoltà d' eseguirlo: il *cromatico* è infame per mollezza: restavi il *diatonico*, che da Platone viene assegnato alla musica mondana. Dal contesto però si rileva che qui Macrobio parla di quella musica diatonica, che que' vecchioni trovavano ne' corpi celesti, ma che i nostri sbarbati astronomi non vi trovano di sorta alcuna. La verità però è che il *genere enarmonico* fu abbandonato da molti secoli in quà, nè sicuramente potrà giammai ripristinarsi. Plutarco rimproverava i musici del suo tempo d' averlo abbandonato, e, quasicchè l' avesse sentito colle sue orecchie, diceva ch' era il più bello dei tre. Ma i musici avevano ragione, ed ogni uomo di buon senso concorrerà nel loro parere. Il *genere enarmonico* si aggirava sopra intervalli minuti e poco sensibili: ma dovendo la musica de' Greci eseguirsi in pubblico, in teatri vastissimi, e a cielo scoperto, doveva esser composta di tratti forti e vigorosi, e d' intervalli ben marcati e sensibili: e si determinarono perciò gli antichi a tutta ragione di lasciare

al

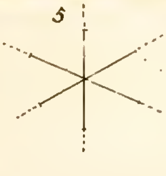
3



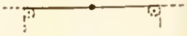
4



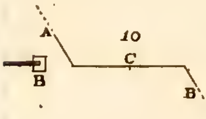
5



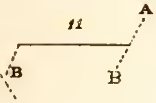
6



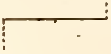
10



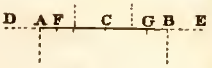
11



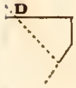
12



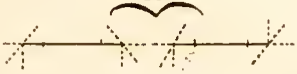
13



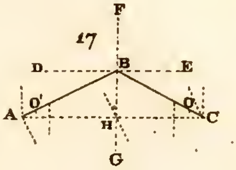
15



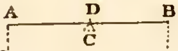
16



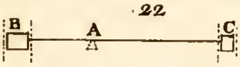
17


F
D
B
E
O'
O
A
H
C
G

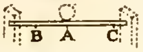
21



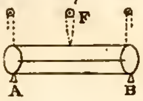
22



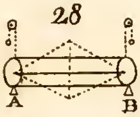
23



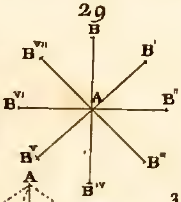
27



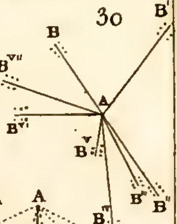
28



29

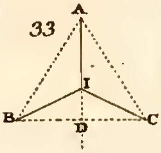

B
B^vii
B'
B^vi
A
B''
B^v
B'''
B^iv

30

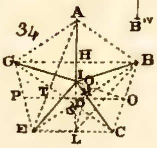

B
B'
B^vii
A
B^vi
B^v
B''
B'''

C'''
D'''
C^iv
I'''
B
I^iv

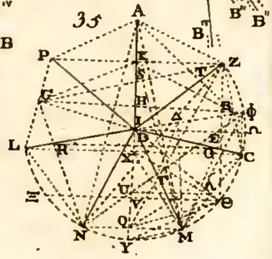
33



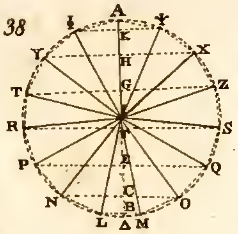
34


A
G
H
B
I
T
P
O
E
L
C

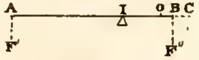
35


A
P
K
T
Z
G
H
L
R
I
C
X
N
Q
Y
M

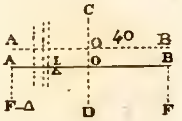
38

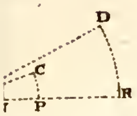

I
A
K
Y
X
H
G
T
Z
R
S
P
Q
N
O
L
M

39

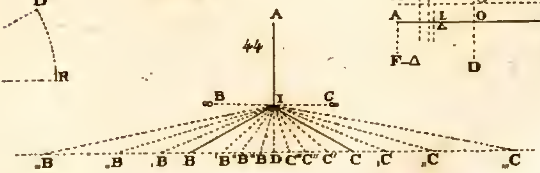


40

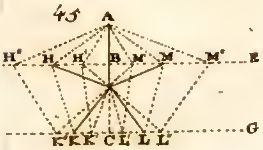

C
A
B
A
I
O
B
F
D
F



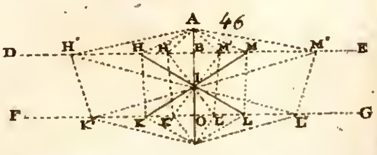
44


A
B
I
C
B
B
B
B
B
B
B
D
C
C
C
C
C
C
C

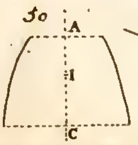
45


A
H
H
H
B
M
M
M
E
G
K
K
K
C
L
L
L

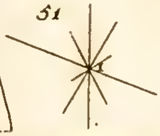
46


A
D
H
H
H
B
M
M
M
E
I
F
K
K
K
O
L
L
L
G

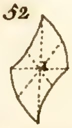
50



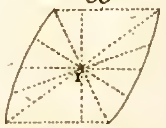
51



52



53



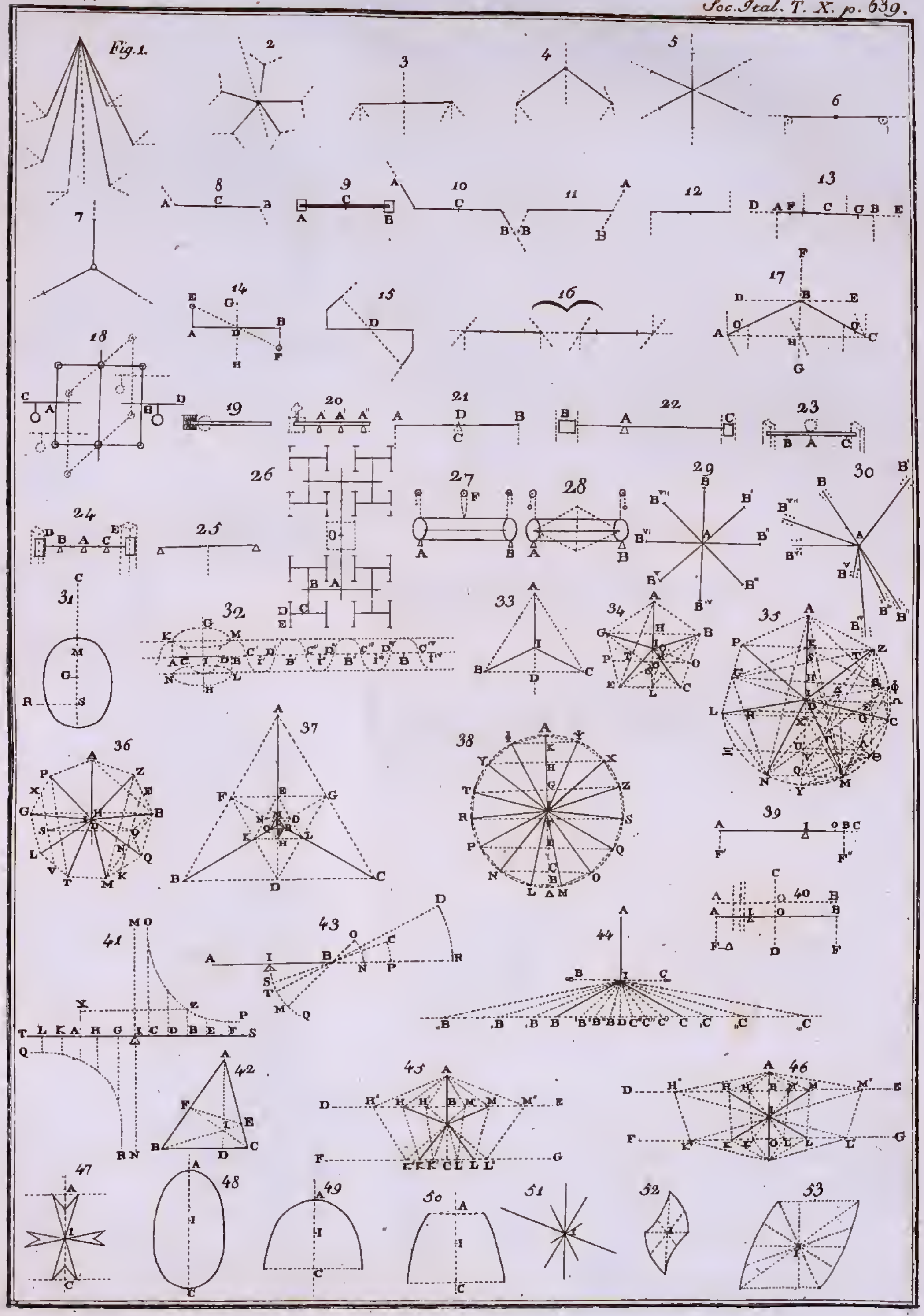
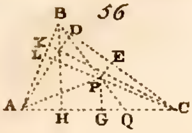
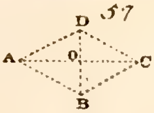


Fig. 1.

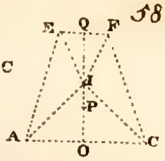
56


B
D
K
L
E
P
A
H
G
Q
C

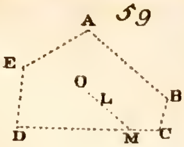
57



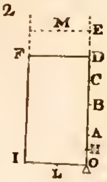
58



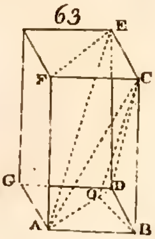
59



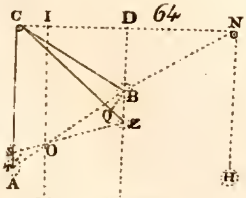
62


M
E
F
D
C
B
A
H
O
I
L

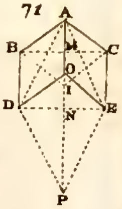
63



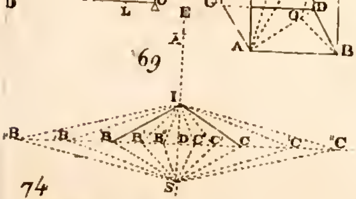
64


C
I
D
N
B
Q
Z
S
O
T
A
M
H

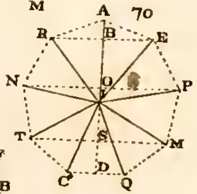
71


A
B
M
C
O
D
I
E
N
P

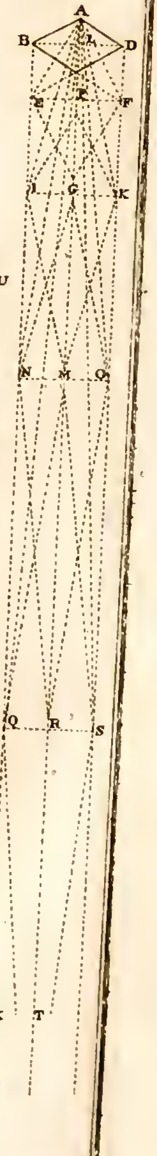
69


E
A
I
B
B
B
B
B
D
C
C
C
C
C
S

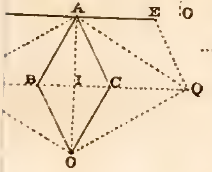
70


A
R
B
E
N
O
P
T
S
M
C
D
Q

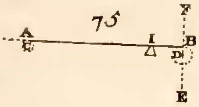
72


A
B
L
D
E
F
I
G
K
N
M
O
Q
R
S
X
T
Z

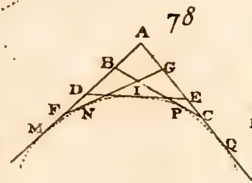
74



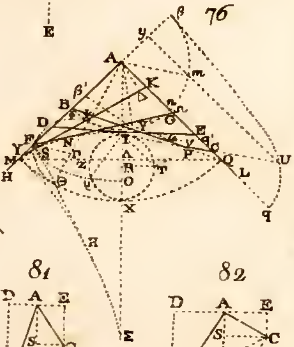
75

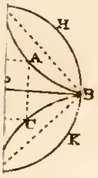


78

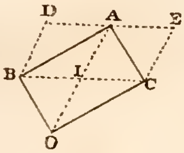

A
B
G
D
I
E
F
N
P
C
M
Q

76

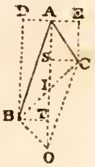

β
y
A
m
K
β'
B
D
G
E
Y
F
S
N
I
V
P
Q
M
H
A
R
T
O
X
U
L
q
Σ



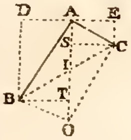
80



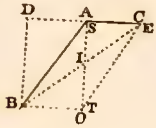
81



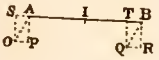
82



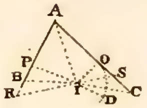
84



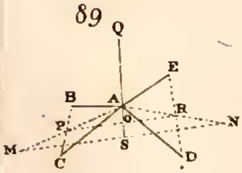
85



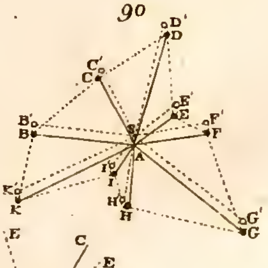
86



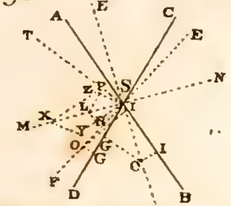
89

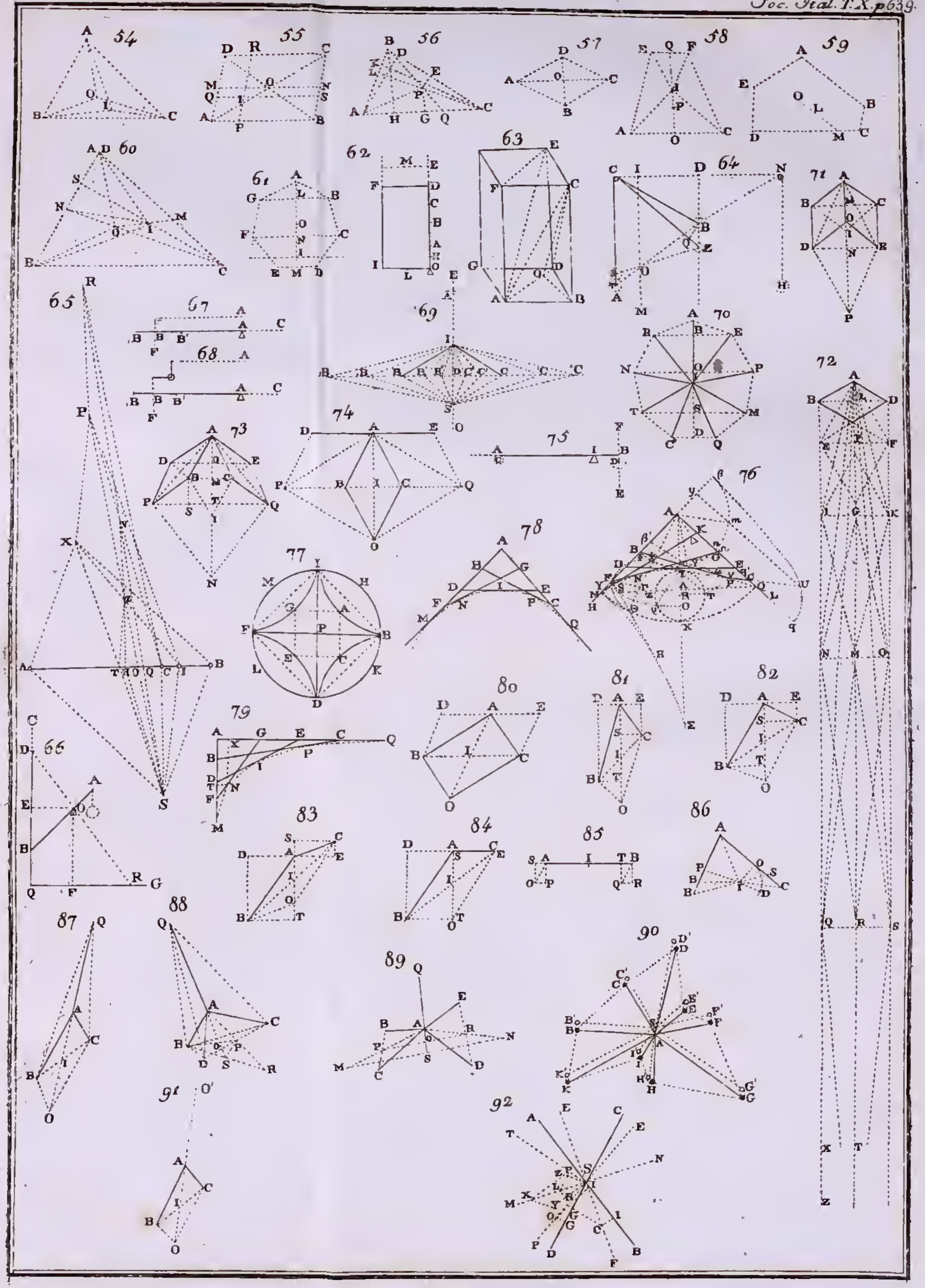

Q
E
B
A
R
N
P
O
S
M
C
D

90


D'
D
C'
C
E'
E
B'
B
F'
F
S
A
I'
I
K'
K
H'
H
G'
G

92


A
E
C
T
E
N
Z
P
S
I
X
L
R
M
Y
O
G
C
I
P
D
F
B



al più all' ombra del gabinetto le molli leziosaggini, e le delicate contorsioni prodotte da intervalli minuti, l' uso de' quali alla fin fine perì, come perisce ogni cosa che non sia sostenuta dalla generale approvazione degli uomini sensati e di buon gusto.

MEMORIA

Di Antonio Lombardi

SULLA MIGLIOR FORMA DA DARSI AI RIPARI, CHE SI COSTRUISCONO NE' FIUMI

Presentata da Pompilio Pozzetti il dì 4. *Febbraro* 1803.

Le esperienze istituite dai più accreditati Autori per misurare la forza, che i fluidi esercitano nel percuotere le superficie o rettilinee, o curvilinee, ci presentano dei risultati che non si accordano punto con le ingegnose teorie lasciateci in questa materia dai sommi Uomini, Newton, Daniele Bernoulli, Alembert, Eulero, eccettuato però sempre il caso dell' urto diretto, in cui la teoria corrisponde sufficientemente alla pratica. Sembra perciò doversi conchiudere che inùtil fatica sia quella di voler calcolare teoricamente la percossa dei fluidi contro le superficie inclinate, piane, e curve, e che debbasi piuttosto nei casi concreti, interrogar all' uopo la natura con la via delle esperienze. Ciò nullameno importando assaissimo lo spingere oltre le nostre ricerche in una parte di Matematica mista che al dire del Celebre Sig. Abbate Bossut, è ancora per molti riguardi assai imperfetta, io ho fatte alcune riflessioni su questa materia, dirette a migliorare la forma ordinaria dei ripari che si usano nei fiumi, ed ho creduto di poterle assoggettare al pubblico giudizio. Quantunque queste siano appoggiate semplicemente alla teoria, e possano per le ragioni addotte esser poco apprezzate, mi lusingo però che se i risultati pratici non corrisponderanno adequatamente alla teoria, pure non vi sarà in questo caso fra essa, e la pratica quella somma distanza rilevata ta in altre circostanze dagli Esperimentatori, cagion molte volte del dispregio in cui cadono presso i meno versati nelle Matematiche le considerazioni dinamiche.

§. 1. Gli Scrittori tutti che trattano dei ripari, e della maniera di formarli, insegnano a costruire dei prismi di diversa materia a norma delle circostanze, che presentano alla corrente una superficie piana inclinata per lo più all' Orizzonte, perchè così producono migliori effetti. Il Padre Abbate Grandi però si è più degli altri avanzato nell' esame teorico di questo punto importantissimo di Architettura idraulica, e nel suo trattato geometrico del movimento delle acque ha paragonato gli effetti della percossa perpendicolare di una corrente contro le superficie piane, a quelli prodotti dalla medesima causa contro le superficie curve che presentano la loro convessità al corso del fiume. Nel rileggere io il Capo VI. dell' opera citata stupiva meco stesso, come finora non siavi stato, almeno per quanto mi è noto, chi abbia pensato ad applicare li principj teorici di così celebre Autore alla costruzione dei ripari, e non siasi per anche introdotto il metodo di costruire i ripari che presentino una superficie convessa all' urto della corrente. L' esame di alcune proposizioni del Capo VI. del suddetto trattato dimostrerà, quanto questo metodo di costruzione sia da preferirsi a qualunque altro.

§. 2. Alla Proposizione 45. Egli dimostra che l' impressione fatta perpendicolarmente nel punto G (Fig. I.) di un ostacolo rettilineo ortogonale sta all' impressione fatta contro un ostacolo curvilineo AF nel punto F percosso secondo la direzione FC perpendicolare alla curva in F, come la normale FC alla sunormale CB, e che l' impressione stessa fatta nel punto G della AG sta all' impressione fatta nel punto F della curva AF secondo la direzione GI parallela all' asse, come il quadrato di CF al quadrato di CB, e quello che dicesi del punto F dicesi di qualunque altro punto preso sulla curva AF. Generalmente parlando adunque, resisterà più un riparo curvilineo che un rettilineo, sebbene siano amendue opposti direttamente all' urto della corrente, come succede nel caso esposto, essendo sempre la normale CF maggiore della sunormale CB (1). Ciò si rende anche manifesto al solo riflettere che l' ostacolo curvilineo AF quantunque venga urtato direttamente dalla corrente, pure non riceve l' impressione dei fili acquei egualmente in tutti li suoi punti come fa il riparo AG, ma varia secondo la diversa direzione degli elementi infinitesimi di cui può considerarsi composta la curva AF, la direzione dei quali è sempre obliqua alla corrente in tutti i suoi punti tranne un solo.

§. 3. Per mezzo di questa proposizione il suddetto Autore determina nella seguente la proporzione che passa fra l' urto contro le superficie piane, e le curve. Trova egli che la percossa fatta contro tutto il piano AK situato ortogonalmente (Fig. II.) sta a quella contro la superficie curva AFK fatta secondo la direzione GF paralella alla riva AB, come il cilindro generato dal rettangolo AKRP intorno all' asse RP sta al solido generato dalla rivoluzione intorno allo stesso asse della superficie curva AQORP, che si ottiene facendo in tutti li punti della curva AFR la proporzione seguente: la normale FG sta alla sunormale BG, come la linea costante GI ad una quarta proporzionale QI, e la proporzione fra l' urto perpendicolare contro AK e l' urto pur perpendicolare contro la curva AFR, sta come il rettangolo AKRP allo spazio curvilineo AQORP. Fra le diverse curve adunque che adoperar si possono nella forma dei ripari, si do-

---

(1) Questa dimostrazione del Padre Grandi è appoggiata all' altra che le percosse sui piani obliqui siano proporzionali ai quadrati dei seni degli angoli d' incidenza, dimostrazione che non corrisponde agli esperimenti, come ho accennato in principio; ma da quanto si dirà in appresso, si vedrà che prendendo anche una proporzione minore della suddetta, ciò nulla ostante si otterrà sempre molto vantaggio, usando ripari curvilinei.

dovranno preferir sempre quelle, in cui il solido suddetto abbia al cilindro corrispondente la minor possibile ragione, giacchè questo è il caso più ordinario, cioè di non collocar mai i ripari a ricevere direttamente l' urto della corrente.

§. 4. L' oggetto principale che io ò preso a scopo in questa Memoria, si è di determinare la forma migliore da darsi ai ripari che attualmente si debbono collocare nei fiumi per difendere le rive dalle corrosioni, così io ò giudicato che possa riuscir vantaggioso il cercare, sempre con la scorta del Chiar. P. Grandi di determinare quali fra le curve più cognite e più facili a descriversi, debbono preferirsi nella costruzione dei ripari.

Fra le diverse proporzioni determinate da lui (nei Corollarii, e scolio della Proposizione 46.) nelle Sezioni Coniche, e nelle tre curve trascendenti, la Cicloide, la Logaritmica, e la Trattoria, egli osserva che quella della Parabola è espressa come segue:

Rappresenti AF (Fig. III.) una Parabola, la quale venga urtata dalla corrente in una direzione parallela all' asse AB, e sia AG un riparo uguale in lunghezza alla massima ordinata della Parabola, che faccia angolo retto con l' asse medesimo. Dal punto F estremità del riparo si abbassi la normale FC sull' asse prolungato, e la ordinata ortogonale BF; si descriva poi colla sunormale BC, che si sa essere la metà del parametro, l' arco circolare BH. La proporzione fra l' urto perpendicolare sul riparo AG, e quella sull' arco parabolico AF in direzione parallela ad AB viene determinata dalla ragione che passa fra AG, e l' arco BH descritto col raggio BC, e segato in H dalla normale FC.

Da ciò il P. Grandi ricava quest' altra importantissima conseguenza, che prolungando all' infinito l' arco parabolico AF, l' impressione contro di questo non cresce all' infinito, perchè il raggio BC è finito e l' angolo BCH, e in conseguenza l' arco BH non arriva mai a 90. gradi, mentre quella sull' ordinata corrispondente è infinita, perchè all' arco infinito corrisponde un' ordinata infinita. Da ciò si deduce che prendendo AK uguale al quadrante del cerchio descritto col raggio BC, l' impressione sopra AK sarà sempre maggiore di quella che si fa sopra l' arco infinito della Parabola. Questa bellissima proprietà di tal Curva, che fra le Sezioni Coniche è ancora la più facile a descriversi, deve farla preferire alle altre nella costruzione dei ripari. Imperocchè la proporzione suddetta va sempre decrescendo all' allungarsi del riparo, cosa che non succede nelle altre Sezioni Coniche, come si può osservare in detto Scolio. La Logaritmica è vero presenta una proporzione minore, poichè in essa l' urto fatto contro la prima ordinata uguale alla sottangente sta a quello fatto contro la curva in direzione paralella all' assintoto, come il quadrato sta alla differenza fra il quadrato ed il cerchio iscritto, cioè prossimamente come 56 : 11; supposto la ragione del diametro alla circonferenza quella di 7 : 22; ma siccome questa curva è assai più difficile da descriversi in pratica per esser trascendente, così io credo che anche per questo motivo si debba preferir la Parabola.

§. 5. Io finora ho ristrette le mie considerazioni alli ripari collocati ad angolo retto alla sponda, ma per l' ordinario si dispongono questi ad angolo ottuso, in modo che ricevono obliquamente l' urto della corrente, che diminuisce secondo la teoria, in ragione del quadrato del seno dell' angolo d' incidenza. Potrebbe perciò dubitarsi se debbano preferirsi anche in questi casi li ripari curvilinei ai rettilinei; ma svanirà ogni dubbio all' osservare, che se sia disposto il riparo QD (Fig. IV.) in modo che riceva obliquamente l' impressione della corrente AB, si potrà sempre dentro il triangolo QFD situare un riparo curvilineo QML, a cui sia la QD tangente, e che riceva più obliquamente in tutti li suoi punti l' urto suddetto, giacchè i fili acquei incontreranno più obliquamente li diversi elementi infinitesimi della curva del riparo QML, quanto più si scosteranno dal vertice Q della curva, mentre che la direzione con cui incontrano li punti del riparo QD è sempre la stessa, ed è meno obliqua di qualunque direzione presa sulla linea QML. Perlocchè vedesi chiaramente che l' impressione contro tutto il riparo QD sarà sempre maggiore di quella esercitata contro il riparo curvo QML, perchè gli angoli d'incidenza AMQ essendo sempre minori delli suoi corrispondenti ABQ, la ragione dei quadrati dei seni sarà sempre minore in ogni punto del riparo QML di quello sia in qualunque punto del riparo rettilineo QD, in cui inoltre tal ragione è costante per tutta l' estensione del riparo.

§. 6. Ma non sono questi li soli vantaggi che aspettar si debbono dai ripari disposti in una linea curva. Un altro forse di maggior entità degli esposti ne producono essi, quello cioè di impedire che li vortici dell' acqua escavino al loro piede pericolosi gorghi. E a dir vero, siccome abbiamo osservato che l' urto della corrente contro li ripari curvi è di gran lunga minore di quello che sostengono li ripari rettilinei, sebbene obliqui alla corrente, perciò li vortici avranno minor forza per trivellare con la punta dei loro coni il terreno, e le ghiare su cui poggi un riparo curvo; e più piccoli, e poco profondi perciò saranno i gorghi dai vortici stessi formativi al piede. E siccome è chiaro che le curve non hanno una sola direzione col filone, ma in ogni loro punto la mutano, si avrà un nuovo argomento per decidere che minori debbano essere i vortici, e di minor forza, perchè le direzioni riflesse incontreranno ad angolo sempre meno acuto le direzioni paralelle della corrente, quanto più si scosteranno dal vertice della curva, la qual riflessione di direzioni è la causa principale dei vortici. Infatti sia (Fig. IV.) l' ostacolo rettilineo QD che faccia angolo ottuso colla sponda QO, e QML rappresenti un ostacolo curvo, li cui elementi infinitesimi faranno angoli sempre più ottusi con la sponda QO, quanto più si scosteranno dal punto Q, supposto però che l' ostacolo QD sia tangente alla curva in Q. Sia ora AB un filamento acqueo, che urti l' ostacolo QD in

B,

B, e l'ostacolo QML in M; siccome l'angolo ABQ d'incidenza è maggiore dell'altro angolo d'incidenza AMQ, così l'angolo di riflessione EBD sarà pur esso maggiore dell'altro angolo di riflessione SML, e quello che dicesi del punto M, dicesi di qualunque altro punto preso sulla curva QML; così molto minori dovranno essere i vortici formati al piede del riparo curvo, e meno forti specialmente verso l'estremità L, di quelli formati al piede dell'ostacolo QD, il che contribuirà moltissimo alla sussistenza del riparo QML.

§. 7. Difficile riuscirà, a dir vero, in pratica il poter descrivere esattamente o un arco di circolo, o una Parabola, o qualsivoglia altra curva che meglio convenisse alla forma di un riparo; specialmente se questo dovrà costruirsi con Bergoli ripieni di sassi, come usasi nei nostri Torrenti. Il miglior mezzo però, cred'io, sarà quello di levare prima un'esatta pianta di quel tratto di fiume, in cui si deve costruire il riparo, e quindi disegnare con precisione sulla Mappa il riparo, o ripari curvi che si vorranno collocare alla sponda. Ciò eseguito l'Ingegnere dovrà nuovamente portarsi sulla faccia del luogo, ed ivi disegnato sul terreno sotto quell'angolo che è fissato sulla Mappa, l'asse della curva ricercata, condurre la massima ordinata all'estremità dell'asse, e quindi a tratto a tratto innalzare altre ordinate proporzionali a quelle che sono disegnate sulla Mappa, per il che non avrà d'uopo che del compasso, della scala, e del Grafometro; così operando avrà diversi punti, per li quali facendo passare un piccolo fossato, questo delineerà per approssimazione l'andamento della curva addimandata. E siccome si è veduto che la Parabola e una delle curve da preferirsi nella costruzione dei ripari, così questa sarà quella che dovrà descriversi sulla Mappa, o con l'ajuto dell'Istrumento opportuno, o forse più facilmente col metodo dei circoli descritti in modo che le loro circonferenze vanno a toccarsi in un dato punto, come indica la Fig. V. in cui AB rappresenta il parametro, B il vertice della curva, e le BE, BF ec. l'asciscisse. Disponendo poscia i Bergoli, o Piramidi tronche secondo la linea disegnata sul terreno, il riparo prenderà la forma della Parabola richiesta, e sarà dì una forte difesa alla sponda minacciata dall' impeto della corrente. Con maggiore facilità poi si descriveranno le curve dei ripari, allorchè si costruiranno questi di pietra e sassi in calce, ripari sempre preferibili alli sopra nominati, o ad altri simili in cui entrino legnami, specialmente nei luoghi dove li fiumi corrono in ghiara, sì perchè non sono soggetti alla corruzione, e perchè qualora sono investiti dalla corrente non perdono punto del loro peso specifico. Ciò accade bensì alli ripari composti di legnami, e sassi perchè la corrente non li percuote soltanto, ma filtrando fra le molte loro fenditure, li rende assai più leggieri, e perciò meno atti a resistere all' urto dell' impetuosa corrente.

§. 8. Una delle avvertenze più necessarie nella costruzione dei ripari, si è certamente quella di disporli con molta scarpa verso l' alveo più interno del fiume per facilitare le deposizioni delle torbide appiedi di questi, ed in conseguenza il loro buon esito. Ciò posto si rifletta che io ho considerata la curva AF (Fig. II.) situata in un piano orizzontale; che se si immagini la detta curva con l' asse perpendicolare all' Orizzonte, l' impressione contro di essa sarà per le addotte ragioni minore assai di quella contro il piano rettilineo inclinato secondo la direzione della tangente. La curvatura adunque della scarpa di un riparo, contribuisce anch' essa a infievolire l' urto della corrente assai più di quel che faccia la scarpa disposta in linea retta, onde per ottenere un maggior effetto da un riparo, conviene disporre la sua scarpa in una linea curva, e fra le curve una delle migliori sarà la Parabola.

§. 9. Questo vantaggio che hanno i ripari con la scarpa disposta in una curva sopra quelli che l' hanno disposta in linea retta, gioverà moltissimo alla loro sussistenza, perchè oltre le ragioni addotte di sopra, si aumenteranno le de-

deposizioni della corrente appiedi dei medesimi, giacchè estinguendosi l'impulso dell'acqua sono maggiori, come insegna l'esperienza, le materie depositate; dal che ne seguirà che la corrente abbandonerà più presto il piede di un riparo doppiamente curvo, in confronto di un altro che sia disposto in una superficie piana. Rendendosi dunque minore l'urto contro li ripari doppiamente curvi, minori saranno li vortici che vi si formeranno al loro piede, e languida perciò, a non dir nulla, sarà la forza loro per sconvolgere il fondo del fiume, e formar gorghi sempre pregiudicievoli alle sponde. Che se li ripari da costruirsi siano di muro, gioverà molto il disegnarne i fondamenti secondo la direzione della curvatura che vuol darsi al riparo sopra terra, come pure nel costruirli si dovrà procurare che la loro scarpa abbia la medesima curvatura, perchè se si formerà qualche gorgo al loro piede, l'acqua avrà molto minor forza di profondarlo, quando siano costruiti con la predetta avvertenza, come dal fin quì detto facilmente rilevasi.

Queste sono le considerazioni che io ò giudicato di poter meritare la pubblica attenzione intorno a un ramo dell'Architettura Idraulica assai interessante, ma al tempo stesso assai negletto. Se questo mio breve comento di quanto lasciò scritto in tale proposito uno dei più celebri ingegni Italiani, risvegliar potesse in qualcuno l'utile curiosità d'intraprendere una serie di ben regolate esperienze, ma eseguite con grandi apparati in qualche fiume, dirette ad esaminare qual sia la corrispondenza fra le leggi della natura, e li sovraesposti principii teorici nell' urto de' fluidi contro li ripari curvilinei, pago sarei, perchè dir potrei di aver io in lui eccitato un così vantaggioso pensiero, e di aver in qualche piccola parte contribuito per tal modo all' avanzamento della Scienza idraulica.

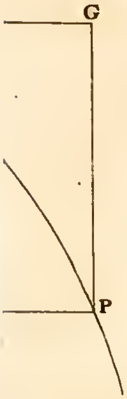


Fig. II.

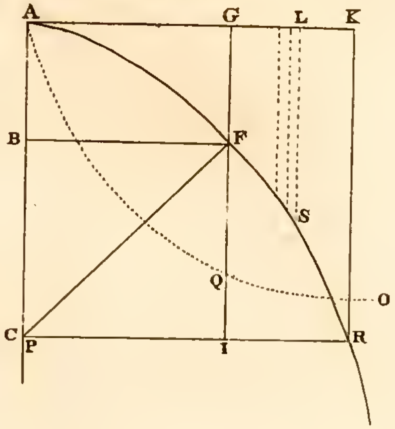

A
G
L
K
B
F
S
Q
O
C
P
I
R

Fig. IV.

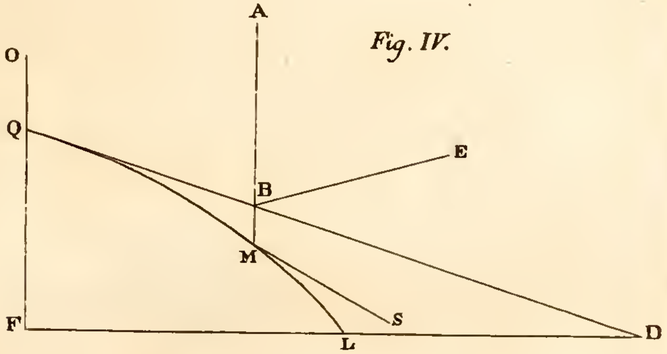

A
O
Q
E
B
M
S
F
L
D

Fig. V.

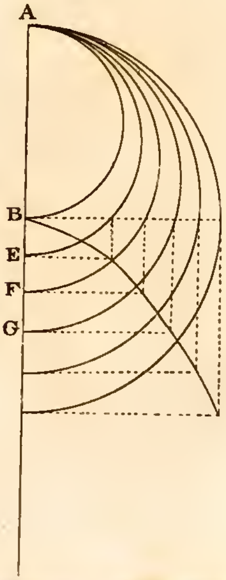


Fig. I.

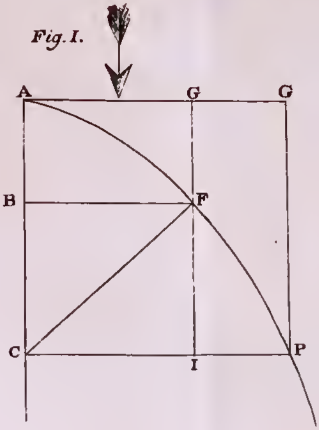


Fig. II.

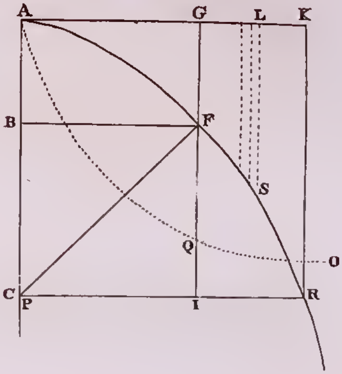

A
G
L
K
B
F
S
Q
O
C
P
I
R

Fig. III.

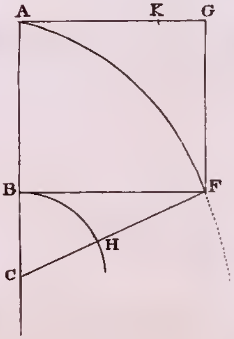


Fig. IV.

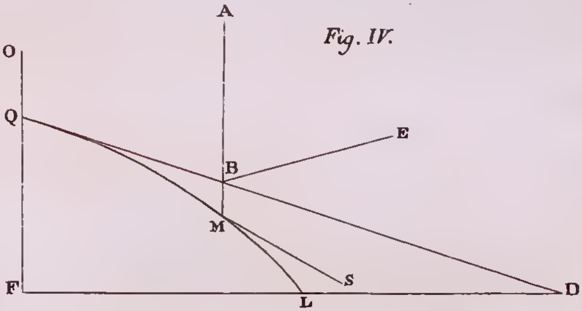
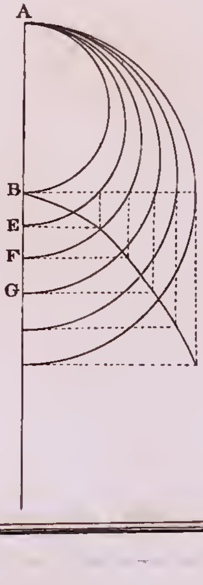

A
O
Q
E
B
M
S
F
L
D

Fig. V.



PENSIERI GEOMETRICI

Di Pietro Ferroni

Ricevuti il dì 9. Febbrajo 1803.

Trascorso ormai più d' un secolo da poi che Viviani, non ricordatosi, malgrado il possesso che aveva della Geometria degli antichi, d'essere stato quasi negli stessi termini prevenuto da Pappo (*a*), pubblicò la maniera di conseguire, dietro l' esempio della Lunula Ippocratica del cinquecento in circa avanti Cristo, sulla superficie d' una Sfera porzione della medesima, che nel tutto e nelle parti fosse geometricamente *quadrabile* (*b*); Bossut nel Volume II. delle „ Memorie dell' Instituto delle Scienze ed Arti di Francia „ (*c*) annunzia il

---

(*a*) Nell' Esemplare di questo Classico, già posseduto da Viviani ed oggi dalla Biblioteca pubblica Magliabechiana, vi sono diverse ritoccature in *lapis* e varie lettere corrette sul Testo e Figura di che si parla, di mano dell' istesso Viviani. Quindi è che Grandi s' esprimesse a ragione così = *Obstupuit insignis Geometra Vincentius Viviani* etc. = nell' Operetta *De Quadratura Circuli & Hyperbolæ* etc. *Pisis*, M. DCC. X. (*Præfatio ad Lectorem* pp. XI. XII.)

(*b*) Montucla, *Histoire des Mathématiques* (2. Edit.) (T. II. Par. IV. Liv. I. §. X. p. 94 Planc. III. Fig. 31.) — *Acta Eruditorum Lipsiæ An* M.DC. XCIV. *publicata* (Mens. Maj. pp. 206-7-8) — *Formazione e misura di tutti i Cieli* ec. *curiosa Esercitazione matematica di V.V.* ec. Firenze, M DC. XCII — *Geometrica demonstratio Vivianeorum Problematum* etc. *Auctore D. Guidone Grando* etc. *Florentiæ*, M.DC IC.

(*c*) *Mémoires de l'Institut National des Sciences & Arts = Sciences Mathématiques & Physiques = Tome second. Paris, Fructidor An.* VII. („ Nouveau Théorême de Géométrie, où l'on assigne des portions de voûte hémisphérique dont la solidité s'exprime par une formule algebrique „. Lu le 6 Floreal, an 5 (pp. 226-7-8).

Teorema nuovo d' una porzione di Sfera geometricamente *cubabile*, promettendo di palesarne in appresso la prova. Questa dimostrazione non incontrandosi, com' eravi luogo di credere, nel III. Tomo delle suddivisate *Memorie*, nè tampoco essendone fatta altrimenti parola dall' Autore predetto nel suo „ Saggio d' Istoria generale delle Matematiche „ non ha guari stampato (*d*), e d' altra parte rilevandosi agevolmente dal racconto del primo annunzio della scoperta, ch' egli siavi arrivato mediante il Calcolo integrale, e sopra tutto con impiegare quelle difficili Formule a doppio segno d' integrazione introdotte per simili ricerche dall' Euler (*e*), e dall' istesso Bossut soventi volte adoprate nel suo recente „ Trattato di Calcolo Infinitesimale „ (*f*), ho giudicato di non dover trattenermi di più a comunicare la mia ai Matematici, semplice, piana, ed interamente sintetica, trascrivendola da' miei inediti *Perelliani*. Oltre di che non sarebbe dicevole, che quest' aggiunta alla Vela *quadrabile* Fiorentina, facile com' ella è a senso mio e suscettibile della mas-

---

(d) *Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques. A Paris*, M. DCCC. II. (Tom. II. Période IV. Chap. I. pp. 19-20-21. An -1692, *Aenigma geometricum de miro opificio testitudinis* (sic) *quadrabilis hemisphærica*) (Chap. IV. p. 60. *de testitudine quadrabili* in proposito di Buffon) (Chap. VII. p. 115. An 1718.).

(e) *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ. Tom.* XIV. *pro anno* M. DCC. LXIX. *Petropoli*, M. DCC. LXX. (Par. I. (*Summarium* N. IV. p. 13. *De Formulis integralibus duplicatis. Auctore L. Eulero* (pp. 72-103, e segnatamente p. 93. §. 33. ove si dice *Problema illud quondam famosum Florentinum* etc. — p. 96. §. 37. Tab. II. Fig. 7. „ Vela Fiorentina „ e più generalmente p. 97. §. 38. e p. 101. §. 44. Tab. II. Fig. 9. = *Hinc igitur solutio Problematis Florentini generalissime adornabitur* =).

(f) *Traité de Calcul differentiel & de Calcul Intégral* etc. *A Paris*, M.DCC XCVIII. (*Tome* II., e massimamente nelle *Memorie* che si leggono in fine).

massima eleganza geometrica, si facesse ora dipendere da principj men ovvj e familiari di quelli, sopra i quali s' appoggia il Problema celebre Fiorentino, che unicamente sono i Teoremi antichissimi d' Archimede intorno alla Sfera e Cilindro insieme colla misura dell' Area Cielocilindrica, assegnata avanti di tutti da Roberval sul principio del secolo XVII., ed analoga all' Elica d' Archita Tarantino. E se la costruzione grafica di quella Vela (avvengachè non acconcia come la Vela architettonica antica a servir di Cupola alle Basiliche, Tempj, o Tribune, non tanto per essere il contorno superiore dei suoi quattro occhj o finestre eguale sì di lunghezza ciascuno all' arco d' una metà di Semiellisse, ma piegato in doppia curvatura e perciò retto in falso su i piè-diritti o *peducci*, quanto ancora perchè di peggior garbo e apparenza degli Archi, i quali contra le regole d' Arte si sdrucissero nelle pareti d' una Rotonda, ognuno degli occhj medesimi presenterebbesi storto, sghembo, e non-simetrico sulla corda o lato spettante al sottoposto Quadrato) mercè della rara bellezza e semplicità, che seppe darle il Discepolo ultimo di Galileo, meritò tosto le lodi de' valorosi Analisti contemporanei Leibnitz (g), Bernoulli (*h*), Gregory (*i*), Wallis (*k*), ec., e venne quindi rammemorata come pregevo-

---

(g) *Acta Eruditorum Lipsiæ anno* M. DC. XCII. *publicata* (*Constructio Testudinis quadrabilis hemisphæricæ* = *Auctore* G. G. L.) *Mens. Jun.* p. 275.).

(*h*) *Jacobi Bernoulli Basil. Opera* etc. Tom. I. (Num LII. *Aenigmatis Florentini solutiones variæ infinitæ*. Tab XX. p. 512.) — *Acta Eruditorum Lips. anno* M. DC. XCII. *publicata* (*Mens. Aug.* p. 370.).

(*i*) *Philosophical Transactions* ec. Vol. XVIII. *for the Year* M. DC XCIV. *London*, M. DC. XCV. (Jan. $169\frac{3}{4}$. Num. 207. §. VI p. 25. *Solutio Problematis Florentini de Testitudine* (sic) *Veliformi quadrabili a Davide Gregorio &c communicata*).

(*k*) *Philos. Transact.* ec T. XVI. *for the Years* 1686 *and* 1687. *London*, M. DC. LXXXVIII.) Aggiunta pel Gennajo $169\frac{2}{3}$.) (Numb. 196. § II. pp. 584-92 = *Problema Florentinum de mira Templi Testudine quadrabili a .... Johanne Wallis solutum* =) (Figg. 1. 2.) —

lissima ed ammiranda, quantunque volte i Geometri ebber occasione d' estendere le loro speculazioni o sul modo di tagliar nei Conoidi ed altri Corpi rotondi parte di superficie egualmente *quadrabile* (*l*), o sul metodo di tracciare una Vela sferica corredata d' occhj il cui orlo fosse geometricamente *rettificabile*, ragion voleva che la Vela Fiorentina, già nata assai prima dei nuovi Calcoli sotto gli auspicj Medicei (*m*), ricevesse dalla medesima Sintesi e nella Patria istes-

---

De Algebra Tractatus historicus & practicus &c. *Johannis Wallis &c. Operum Mathematicorum Volumen* II. *Oxoniæ*, M. DC. XCIII. Cap. (ult.) CXII. p. 478-82.).

(*l*) *Acta Eruditorum Lipsiensia* etc. M. DC. XCVI. (pp. 264-479.).

(*m*) *Acta Eruditorum Lipsiæ anno* M. DCC. XVIII. *publicata*. (= *Caroli Ernesti Offenburgii Problema* ,, *Testudinem hemisphæricam fenestris ovalibus perforare, quarum unaquæque peripheriam absolute rectificabilem habeat* ,, = p. 175.) — *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ ad annum* M.DCC.XXVI. *Petropoli*, M.DCC. XXVIII. (*Classis* I. = *De Epicycloidibus in superficie Sphæræ descriptis. Auctore Jacobo Hermanno* = *Nov.* 1726. pp. 210-12) — *Johannis Bernoulli Opera omnia. Tomus* III. (Num. C.XLII. *Problême sur les Epicycloides sphériques* pp. 216-29) — *Historie de l'Académie des Sciences* &c. *avec les Mémoires* &c. *Année* M. DCC. XXXII. *A Paris*. M. DCC. XXXV. (pp. 237 - 55. *Planc.* 13. e segnatamente p. 246. Scol. III. §. XIX.) — *Solution du même Probléme* &c. *Par Maupertuis* pp. 255-59 (ved. 255. nel Proemio) (Figg. 2.) — *Maniere de determiner la nature des Roulettes formées sur la superficie convexe d'une Sphére & de déterminer celles qui sont géométriques, & celles qui sont rectifiables, Par Nicole* (*Planc.* 14, 15, Figg. 8., pp. 271-88) — *Des Epicycloides Sphériques. Par Clairaut* (Figg. 4, pp. 289-94, e nominatamente 292-94) — *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ, Tomus* XV. *pro anno* M. DCC. LXX. *Petropoli*, M. DCC. LXXI. = *De Curva rectificabili in Superficie sphærica. Auct. L. Eulero* = (pp. 195-216) (Incomincia il §. I. così. *Occasione magni illius Problematis Florentini* &c.) — *Bossut, Essai sur l'Histoire* &c. Tom. II. (*Période* IV. *Chap.* VII. pp. 115-17.).

istessa dell' Inventore il compimento lasciato manchevole da Viviani e da Grandi suo espositore ed interprete, in proposito della *cubatura* del di lei Tipo o Modello formatosi sopra una Sfera.

Mi propongo adunque di dimostrare il seguente

TEOREMA.

,, Traforata una Sfera perpendicolarmente al piano
,, d' uno de' suoi Cerchj massimi mediante due Cilindri-retti
,, circolari egnali, di diametro pari al raggio della Sfera
,, suddetta, in modo che a foggia di *trapani* passino i loro
,, assi pe' punti di mezzo d' entrambi i raggi, i quali compongono
,, l' intero diametro del Circolo massimo divisato,
,, la porzione del Solido sferico che resta dopo di questa
,, *trapanatura*, uguaglia appunto due none parti del Cubo
,, circoscritto alla Sfera medesima ,, .

Sia un Quadrante dell' Emisfero così traforato (Fig. 1.) OAXBZCYA dal Semicilindro BPOC, terminato quanto alla parte, che riman dentro del Quadrante emisferico, dal quarto

---

(E' quì il luogo d' osservare come nella seconda edizione dell' *Histoire des Mathématiques* di Montucla, ove parla della *quadratura* delle parti di *Lunula* (Problema facile, elementare, ed analogo in tutto alla *Vela Fiorentina*, di cui ci occupiamo), s' incontra un errore, non avvertito nelle correzioni, alla pag 153. e Fig. 3. della Tav. I. del Tomo I. (Par. I. Lib. III. § XI. *Les géomètres modernes* &c.) sul proposito del Triangolo BIC, non eguale (per quanto egli lo scriva *eguale*) alla porzione di *Lunula* GBF; secondochè agevolmente rilevasi dai diversi Autori, che n'han trattato, anco illustrando gli *Elementi d' Euclide*, fra i quali Whiston, ec., ed in ultimo dalla *Lettera sopra vari Aneddoti matematici* inserita nel VII. Volume delle *Memorie* di questa Società Italiana delle Scienze).

Vedasi finalmente la *Dedicatoria* del Viviani al Gran Principe Ferdinando sì nell'Opera sua precitata che in quella del Grandi.

to della Ciclocilindrica Robervalliana BLTQRC, comune sezione d' ambedue i Solidi. Il Settore o Piramide sferica, ch' hà il suo vertice in O centro della Sfera, e per base la porzione di superficie BTQRCZB dov' è stato aperto l'occhio o finestra, più il Solido storto ed irregolare in figura d' Ungula accartocciata, che resta dietro di quella, ed ha per base il quarto preindicato della superficie Ciclocilindrica BPOCRQB, son tutto ciò che vien tolto per costruzione dalla capacità del Quadrante emisferico. Ma la misura di quel Settore (in cui solo si consuma e si perde, come vedremo, tutto quello che abbiavi d' irrazionale, trascendente, o connesso colla *quadratura* del Circolo) essendo equipollente al volume d' una Piramide di base doppia del Segmento circolare BZCVB per la proprietà della Vela, e d' altezza eguale ad AO, viene a valere quanto i $\frac{2}{3}$ d' un Prisma-retto impostato sul detto Segmento, ed alto come il raggio medesimo AO della Sfera. Dunque essendo il Quadrante emisferico eguale ai $\frac{2}{3}$ del quarto di Cilindro circoscritto all' Emisfero, defalcato il Settore predetto, restano pel valore del Solido residuale i $\frac{2}{3}$ del Prisma-retto, del quale AO è l' altezza, e la base BOC triangolo ortogonio-equicrure, cioè $\frac{1}{3}$ del Cubo circoscritto al Quadrante emisferico dato. Ora l'altro Solido conformato in Ungula avvolta si scioglie ancor esso facilmente in Piramidi tetragone di base col comun vertice in O centro dell' Emisfero, ciascuna delle quali, come HLOTE, riposa sopra il rettangolo elementare HLTE della superficie dell' Ungula, ed ha per altezza OF, normale condotta da O sulla tangente KEG della Semicirconferenza OPB, e vale a dire per la Geometria sul pian della base. Oltrediciò dagli *Elementi* sapendosi, che TE.EH = BE.EH = SM.MN, ossia = OB.IS in virtù dell' Ungula semimiretta Cilindrica, e di più che $OF = \frac{OE^2}{OB} = \frac{OS^2}{OB}$ a motivo di $OB : OE : OF$ ∺, e della bisezione dell' angolo BOF fatta dalla corda OE e derivante dalla similitudinè de' due triangoli rettangoli BOE, OEF, ne risulta quella Piramide elementare $OB . IS . \frac{OS^2}{3 . OB} = \frac{1}{3} . OS^2 . IS =$ (per le *Geometriche Istituzioni*) $\frac{1}{3}$ della Piramide avente per base il Quadrato del raggio della Sfera e per altezza il medesimo raggio, o sivvero $= \frac{1}{9} . AO^3$ circoscritto al Quadrante dell' Emisfero. Quindi è che detratto finalmente, come si è detto di sopra, questo $\frac{1}{9}$ da $\frac{1}{3}$ dell' istesso Cubo del raggio, il Solido rimasto intatto nel traforo del Quadrante emisferico diventa $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ del detto Cubo; laonde presi gli ottupli respettivi, il Solido avanzato alla perforazione di tutta la Sfera s' eguaglia ai $\frac{2}{9}$ del Cubo dell' asse o diametro della medesima.

COROLLARIO I.

Dal mio metodo perciò si ricava, oltre d' un Solido nuovo geometricamente *cubabile*, quale è quello attergato al Settore sferico ATQRCDZBO e piegato da questa parte a *ventaglio* conico-concavo (diversamente dai Corpi considerati da Pappo (*a*) della classe dei Πλεκτοειδὴς (*gauches*), rappor-

---

(a) *Collection. Mathem. Lib.* IV. *Propp.* XXVIII.-XXIX. — (e segnatamente dopo la Prop. XXX. p. 61. nel Preliminare alla trisezione dell' Angolo „ *Antiqui Geometræ* &c. „ *Pisauri*, M.D.LXXXVIII. — M.DC.II.

porto a cui fu da Torelli ristabilita la versione del Testo Greco alterata da Commandino (*b*) ricavasi, dissi, che il Settore sferico avente per base la Vela Fiorentina sta al Solido rimasto imperforato in ragion sesquialtera, ossia come $\frac{3}{9} : \frac{2}{9}$, cioè come il Cilindro circoscritto alla Sfera inscritta, o come il Semicubo circoscritto al solido contenuto dentro la Volta a *schifo* Romana, o il Cubo intero al doppio Solido della medesima Volta; e l' istesso s' applica ai dupli. — Di più si deduce essere il Solido restato intatto nella *trapanatura* della Sfera a quel Solido nuovo in ragion dupla, ossia come la superficie della Vela al sottoposto Quadrato non-icnografico che congiunge le quattro punte o *ricaschi* della medesima Vela, o come la superficie della Volta a *schifo* o *Ciel di carrozza* alla sua icnografia o base quadrata, o come il Solido della Volta suddetta alla *massima* Piramide inscrittavi. - Parimente si fa manifesto, che il Paralellepipedo, la cui base fosse il detto Quadrato inscritto nel Circolo massimo della Sfera e l' altezza il diametro, starebbe al Solido sferico imperforato come 9:4, cioè come il Cono-retto equilatero circoscritto alla Sfera inscritta; e si verifica ancora l' istesso quanto alle loro metà respettive.

COROLLARIO II.

Derivandosi immediatamente da un Teorema del Grandi (*c*) che il Solido Cicloparabolico impostato sulla vera icnografia della Vela Fiorentina, un elemento del quale è $f\mathrm{ET}bae\mathrm{HL}$,

equi-

(*b*) *Josephi Torelli Veronensis Geometrica. Veronæ*, M. DCC. LXIX. (pp. 89-103. e nominatamente p. 96. alla variante 2. del Codice Vaticano).

(*c*) *Geometrica demonstratio Vivianeorum Problematum* &c. (*Propositio* XXIX. p. 134.).

equivalga in volume a $\frac{4}{15}$ del Cubo del raggio AO, vien quello ad essere nella ragion sesquiquinta di 6 : 5 al Solido restato intatto dopo traforata la Sfera, e come 12 : 5 al Solido nuovo sopradescritto, ch' è porzione del primo alzata sulla Semicirconferenza medesima BPO, dotata dell' istesso vertice C, e limitata dall' istesso spigolo (*arrête*) o Curva ciclocilindrica BTQRC. Dunque il Solido cicloparabolico rimane così diviso in due parti, che sono nell'altra ragione di 7 : 5, entrambe geometricamente *cubabili* come l' intero.

COROLLARIO III.

Siccome la Sfera secondo Archimede val quanto un Cilindro ch' abbia per base $\frac{2}{3}$ del Cerchio massimo e per altezza il diametro, laddove in virtù del Teorema premesso il Solido avanzato al taglio de' *trapani* s' è dimostrato eguale ai $\frac{2}{9}$ dell' altro, la cui base sia il Quadrato circoscritto al Circolo massimo e l' altezza l' istesso diametro, ne nasce subito dal paragone di questi due Solidi la conseguenza, che la Sfera sta alla mole residua imperforata della medesima come $\frac{2}{3}$ della Circonferenza circolare a $\frac{2}{9}$ del Perimetro di quel Quadrato ossiano $\frac{8}{9}$ del Diametro, cioè come la Periferia a $1\frac{1}{3}$ del suo Diametro. Dunque la parte di Sfera consumata dalla *trapanatura* è maggiore di quella che resta intatta, come asserì di passaggio Viviani ove scrisse ,, le due trafora- ,, zioni della Sfera le portan via maggior mole di quella che ,, le rimane (*d*) ,, e Grandi provò mediante il Solido ciclopara-

---

(*d*) *Formazione e misura di tutti i Cieli* ec. (Problema sesto §. 5. in calce ,, Anzi di più vi dico ec. ,,).

bolico summentovato (*e*) ; senza però che nè l' uno nè l' altro sapesse assegnare la vera ragione di maggiore inegualità tra la mole sottratta, e la rimanente nella Sfera intera come nell' Emisfero e Quadrante, che or si sa essere di $\Pi - \frac{4}{3} : \frac{4}{3}$, indicando mercè di $\Pi : 1$ la ragione costante della Semicirconferenza circolare al suo Raggio, o di tutta una Circonferenza di Cerchio al proprio Diametro.

COROLLARIO IV.

Rimane impertanto di *non-cubabile* o *non-algebrico* in tutta la capacità del Quadrante emisferico (e presi i quadrupli o gli ottupli, nel volume dell' Emisfero e dell' intera Sfera) la sola Ungula ch' ha per base il Bilineo o *Menisco* cicloparabolico BΨZΦƆC*dcba*B, contenuta fra due vesti o *epidermidi*, una porzione di Superficie sferica convessa, che chiude l' *occhio* della Vela, l'altra concava e parte della superficie d' un Cilindro-retto Parabolico, sopra cui si segnasse dal punto O con un' apertura di Compasso eguale ad AO una Ciclocilindrica imitante quelle di Roberval sopra il Cilindro comune. Nè malagevole è il modo di rintracciarne la dimensione, dipendentemente però dalla *quadratura* del Circolo. Imperciocchè all' effetto di conseguirla vi sono due maniere diverse, che scambievolmente si servono di conferma. E difatti quella sottile Squamma o Valva conchiliforme geometrica o può considerarsi come l' avanzo di mole del Quadrante emisferico dopo detrattone tutto ciò, che v' abbiam riscontrato di perfettamente *cubabile*; ed allora sta al suddetto Quadrante (*Teor.* e *Coroll.* II.) come $\frac{2}{3}\left(\frac{\Pi}{2} . \frac{1}{2}\right) -$

$\frac{2}{9}$

(*e*) Geometrica demonstratio Vivianeorum Problematum &c. (Propos. XXX. e suoi Coroll. pp. 135-36.)

$\frac{2}{9} - \frac{4}{15} : \frac{\Pi}{6} :: \frac{\Pi}{6} - \frac{22}{45} : \frac{\Pi}{6}$. O piuttosto si consideri quella Valva essere il resto del Settore sferico BTQRCDΦΨBO (*Teor.*) dopo toltagli la parte maggiore del Solido cicloparabolico (*Coroll.* II.); ed in tal caso la Valva medesima venendo rappresentata da $2\left(\frac{\Pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} - \frac{7}{45}$, sta allo stesso Quadrante emisferico nella ragione di $\frac{\Pi}{6} - \frac{1}{3} - \frac{7}{45} : \frac{\Pi}{6} :: \frac{\Pi}{6} - \frac{22}{45} : \frac{\Pi}{6}$ come sopra. Laonde tagliando un Arco CΞ eguale alla differenza fra la terza parte del Quadrante CΦB, o arco sotteso dal lato del Dodecagono regolare inscritto nel Circolo intero, ed i $\frac{22}{45}$ del raggio AO, lo Spicchio polare AYCΞOAΔ della Tribuna emisferica (*Testudo*, *Tholus*), ch' è quanto dire i due terzi dello Spicchio cilindrico circoscritto, sarà eguale di mole alla sottil Valva conchiliforme summentovata.

COROLLARIO V.

Al termine della surriferita *Memoria* non pare che ben s' esprima Bossut scrivendo = *percer une* voûte *hémisphérique de quatre fenêtres égales, telles qu'ôtant de la solidité de l'hémisphère la somme des solides qui remplissent ces fenêtres, le reste ait une expression algébrique* =. Conciossiachè nel Problema proposto non si trafora la vera *Volta*, ma l' *Emisfero*, ben differente dalla medesima quanto il pieno dal vuoto. Nulladimeno se si cercasse eziandio la vera *solidità* della Vela Fiorentina, quando sia tutta d' egual grossezza e costrutta in modo, giusta le regole d' Architettura, che tutti i cunei componenti la medesima fino alla *chiave* o *serraglio* e quelli ancora, i quali secondano le finestre nei lo-

loro orli, siano tagliati talmente, che s' indirizzino le facce di essi al comun centro O, non attendendo ai di lei *contrafforti* o *rinfianchi*, ell' è sempre *cubabile*, come quella che (pel *Teorem.*) si agguaglia alla differenza tra $\frac{1}{3}$ del Semicubo del doppio raggio dell'*extrados*, ed $\frac{1}{3}$ dell' altro Semicubo del doppio raggio dell' *intrados* attenente alla Vela *quadrabile* suddivisata. Nè sembra oltrediciò che l' Autore medesimo abbia dirittamente immaginato nella sua *Storia* (*f*) il metodo, col quale il Viviani si faceva al *torno* il Modello della sua nuova *Vela*, tosto che scrive, *on satisfait à la question en* „ *élevant perpendiculairement à la base de la voûte hémis-* „ *phérique, deux cylindres droits &c.* „ mentre al contrario bisogna inalzare dei *mezzi-cilindri* non già sulla base, ma sul semicircolo verticale.

Scolio.

Lascio d' aggiungere altre speculazioni geometriche sull' argomento di questa celebre Vela accennate senza dimostrazione da Grandi nei suoi *Vivianei* (*a*), nè tampoco incontratesi nella voluminosa Raccolta de' superstiti suoi MSS., sebbene fino dal 1699. egli promettesse di dimostrarle in un *Trattato* non mai comparso alla luce intorno le *Sezioni sferocilindriche* (*b*). Forse Perelli di lui discepolo (secondo il rac-

---

(*f*) *Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques* &c. (Tom. II. c. p. 21.).

(*a*) *Scholium* Prop. I. p. 37. — *Notæ* pp. 63 4 5 — *Num.* 49. p. 154. — *Num.* 64. p. 180.

(*b*) *Scholium* Prop. III. p. 42. — *Scholium* Prop XXIV. p. 120. - *Scholium* Prop. XXXVII. p. 175.

racconto di Frisi, ove imprendendo a lodarlo aggiunge piuttosto lode a se stesso (*c*)) lasciò scritte sì fatte dimostrazioni, e v' unì quelle ancora, che volle tener segrete il Viviani (poichè oltre a mancare nella sua Opera del 1692., nemmeno si leggono nel suo Opuscolo inedito *de Solidorum terebratione*, che dovea pubblicarsi postumo nel 1715. (*d*)), portandovi e sull' une e sull' altre quell' aurea sintetica semplicità e nitidezza, che distinguono tutte le poche di lui produzioni. Ma gli scritti o fogli volanti di questo Geometra insigne smarritisi per avventura o caduti in mani avare o cautamente plagiarie m' impegnarono già a meditare su qual volgarissimo fondamento tante ammirabili verità s' appoggiassero; d' onde nacque l' Operetta in principio da me rammentata. Dai cenni datine da Viviani in più luoghi (*e*) chiaramente apparisce, che le due Vele *primarie* Fiorentina e Romana sostanzialmente dipendono in tutto e per tutto dall' unica *quadratura* dell' Ungula semi-retta cilindrica, e le *secondarie* da quella dell' Ungula meno che semi-retta. Per il che dopo d' avere in altre mie Opere, quando la circostanza mi si è presentata più acconcia, partecipate in anticipazione dei *Perelliani* alcune delle non avvisate finora proprietà di simili Volte, come per esempio la Linea di quarto grado in figura di *mezzo-laccio* o *galano* terza projezione ortografica della Vela Fiorentina, anch' essa geometricamente *quadrabile* e consimile in questo alla Parabolica del Grandi (*f*), e la misura della superficie di qualunque Solido roton-

---

(*c*) Si riscontri l' *Elogio di Tommaso Perelli* (Milano 12. Gennajo 1784.) nel Volume LIII. poco sotto citato del „ Giornale Pisano „ .

(*d*) Vedasi lo *Scolio* al termine dell' Articolo I del mio ragionamento „ *I principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza* „ .

(*e*) Sopra tutto dopo il „ Problema ottavo „ nel §. *Dicovi dunque essermi accorto allora* ec.

(*f*) *Magnitudinum exponentialium Logarithmorum*, & *Trigonometriæ sublimis Theoria nova methodo pertractata* &c. *Florentiæ*, M.DCC.LXXXII. (Cap. VIII. pp. 552-53.)

tondo o Cupola in arco gotico circolare (*g*), gioverà adessò di compiacersi in vedendo che l'istess'Ungula conduce egualmente alla *cubatura* facile del Tipo della Volta Romana e del Modello ad un tempo della nuovissima Fiorentina, disparate bensì di figura, ma come David Gregory avvisa (*h*), meritevoli d' esser gemelle, a motivo ch' entrambe le loro Superficie curve (*Corol.* I.) son doppie della comun Base quadrata.

Egli è però da por mente, che la nascita vera della dimensione dell' Ungula non debba desumersi dalla prima pubblicazione fattane da Gregorio da San Vincenzio nel 1647., e vale a dire quasi contemporanea col trovamento della Vela Fiorentina, mentre questo avvenisse nel 1646. siccome afferma di se stesso il Viviani (*i*). Gli Storici tutti delle Matematiche non hanno abbastanza con critica gradazione illuminato tal punto, ed han trascurati parecchi altri articoli, che doverebbero andar di conserva con quello, onde dal loro insieme conoscere come e per quali passi i Geometri del secolo XVII. abbiano accresciute o perfezionate le Teorie d'Apollonio e Archimede. Si sa così poco l'Istoria sincera del successivo progredimento di sì fatte scoperte, ch' io non trovo mai rammentata da alcuno quella maestrevol maniera d' assegnare nel Cono ordinario ACFBE (Fig. 2.) gli *asintoti* d' un' Iperbola, e derivarne dal Circolo le affezioni tutte ammirabili, che loro appartengono: maniera, che noi dobbiamo a Mosè Maimonide (*Moses Ben-Maimon*) Egizio, quando era barbara ancora la più parte d' Europa (*k*). Essa è di

---

(*g*) *De Calculo Integralium Exercitatio mathematica* &c. *Florentiæ*, M.DCC.XCII. (*Sectio* III. §. 49. p. 163. Fig. 43. Tab. II.)

(*h*) L. c. „Philosophical Transactions &c. „ Vol XVIII. p. 29. *Unde patet* &c.

(*i*) *Formazione e misura di tutti i Cieli* ec. Probl. I. §. „ Siccome altre infinite Vele ec. „ — Grandi *Geom. dem. Vivian. Problem.* Num. 13. p. 83.

(*k*) Vedasi *Director dubitantium* del nominato Rabbino (Cap. LXXIII.) - *Dialogo del P. M. Grandi ec. circa la Controversia eccitatagli contro dal D. Alessandro Marchetti. Lucca*, M. DCC. XII. (Num. III. pp. 16-20.).

è di tanta chiarezza e semplicità , che non solo si vede tosto da chicchessia come e perchè l' Iperbola Apolloniana OLPNS stretta tra i due Piani tangenti il Cono , BAM , CAM , i quali si parton dai lati AB , AC del Triangolo ABC paralello al Piano secante generator della Curva, ed hanno AM per comune sezione , non possa mai incontrare le rette CI , GT e sempre vi s'avvicini nell' indefinito prolungamento di loro e dei rami Iperbolici , poichè così portano negli *Elementi* le tangenti del Circolo e di più Circoli paralelli infilati insieme nell' istess' asse , ma oltrediciò rende manifesta contezza sì del centro della Curva situato in G , mutuo incontro di AM e DPZ (guidando il diametro EXF normale a BC) , della lunghezza del semidiametro primario GP = GZ , e di quella del semidiametro secondario o conjugato = BI = CT porzione delle tangenti eguali BM , CM condotte dai punti B , C della circonferenza della base del Cono , o comuni sezioni dei due piani tangenti col pian della base ; la qual facile e naturale determinazione del diametro conjugato può far corredo al nuovo Teorema di Giacomo Bernoulli in proposito della scoperta nel Cono del *parametro* delle Coniche (*l*) . Si scorge coll' istessa evidenza il motivo , in virtù di cui sian sempre eguali le rette IO , ST , eguali i rettangoli IO . OT , IS . ST , perchè eguali al quadrato costante di BI=CT=YL , dovunque si taglino la Curva e gli Asintoti con delle rette come LN paralelle a BC ovvero OS , tale essendo la proprietà *elementare* del Circolo . Finalmente s' intende di subito come tagliata la Piramide triangolare BMCA o il suo prolungamento indefinito all' indietro , limitato dalle tangenti MB , MC , per mezzo d' innumerevoli piani equidistanti da

BACR

(*l*) Jacobi Bernoulli Basileensis Opera . Tomus primus Genevæ, M. DCC. XLIV. (Num. XXXVIII. *Novum Theorema pro doctrina sectionum Conicarum*. Tab. XIV. p. 418) — *Acta Eruditorum Lipsiæ* (Novem. M.DC.LXXXIX. p. 586.).

BACR paralello al primo secante IPTD, vengano ad essere generate nel Cono innumerabili Iperbole *simili* comprese tra *asintoti* inclinati sotto il medesimo angolo. — Nessuno Istorico ci ha fin quì detto, che il Wentzio non facesse che ripetere De la Hire (*m*) come Parent (*n*) sul proposito della *centina* d' un Arco parabolico (*o*), nè che Maclaurin prendesse da Fagnani, senza citarlo, il modo di costruire la Curva Elastica per via della Lemniscata (*p*), nè tampoco che la celebre *Clavis catholica* pubblicata da Baker (*q*) per la costruzione in linee-rette delle *radici* cubiche e biquadratiche altro non sia che la dipendenza quasi immediata d' un Teorema delle *Collezioni* di Pappo, che l' Hermanno non ha saputo indicare, sebbene facile ad incontrarsi nella Proposizione 43. o Teorema 26., ultimo del IV.° Libro. — Un Ano-

---

(*m*) *Histoire de l'Académie des Sciences* &c. *A Paris*, M. DCC. II. (*Mémoires* (24. Mars 1702) „ Remarques sur la forme de quelques Arcs dont on se sert dans l'Architecture „ pp. 100-103).

(*n*) *Résolution du Problême proposé aux Sçavans &c. touchant la nature d' une figure de Voûte*. („ Essais & Recherches &c. „ Vol. II., M. DCC. XIII. pp. 728-33. Planc. 14. Fig. 7.).

(*o*) *Acta Helvetica Pyhsico-mathematico-anatomico-botanico-medica* &c. Tom. III. *Basileæ*, M. DCC. LVII. (Tabb. XVI-XVII. pp. 390-96.) „ *Disquisitio descriptionis cujusdam Arcus architectonici, ex qua nova eaque facillima genesis Parabolæ Apollonianæ deducitur. Auctore Ludovico Wentzio.* „

(*p*) *Nova Acta Eruditorum Lipsiæ anno* M.DCC.LIV. *pubblicata (Mens. Mart.)* („ Lettera di Giovacchino Galfi a Flavio Gangini ec. Pesaro, 1753. „ p. 141.).

(*q*) *Philosophical Transactions* &c. Num. 157. *London*, M.DC.LXXIV. Vol. XIV. *For the Year* 1684. („ An account of a Book, viz. *The Geometrical Key, or construction of all Equations Linear, Quadratic,* Cubic *and* Biquadratic, *bi a* Circle *and one only* Parabole: *by Mr. Tho. Baker* „ (March 20. 168 $\frac{3}{4}$. pp. 549-50) — *The geometrical Key, or a gate of æquations unlocked &c. London*, M. DC. LXXXIV. —.

Anonimo nel Giornale di Lipsia (*r*) ascrive i Tabernacoli o Volte coniche ancor esse *quadrabili* al Grandi; mentre il vero ritrovamento loro si debbe almeno un anno prima a Parent (*s*), e dipende da una scoperta anteriore di Giovanni Bernoulli (*t*), dalla quale poi Monge ha derivate le Superficie *sviluppabili* o riducibili in piano come quella del Conoretto, e le innumerevoli *Evolute* attenenti ad una medesima Curva (*u*), ed io n' ho dedotta nel mio *Trattato de' Solidi Cocleari* la misura della Superficie d' una *Cordonata rampante* impostata sull' Elica d' Apollonio, che avendo per sua projezione stereografica una Spirale Iperbolica, ha per *luogo* del concorso di tutte le sue tangenti sul piano della base del Cilindro, attorno al quale ell' è avvolta, l' altra Spirale generata dall' evoluzione del Circolo, se *primaria*, o una Spirale analoga allungata o scorciata, se *secondaria*. — La Ciclocilindrica di Roberval è stata riconosciuta sì poco dall' Istoriografo istesso Montucla, che la *quadratura* della porzione da lei circoscritta di Superficie cilindrica torna oggi a parergli un Problema nuovo (*v*), quantunque sia il VI.° già

(r) *Actorum Eruditorum, quæ Lipsiæ pubblicantur, Supplementa. Tomus* IX. *Lipsiæ* A M.DCC.XXIX. (*Sectio* II. pp. 45-50. *F. K. Ratio complanandi Superficies curvas* &c. nel Proemio p. 46.) (Dall' Indice si conosce però, p. 507. N. 4., esserne autore *F. Kees*).

(s) *Essais & Recherches* &c. M.DCC.XIII. Vol. II. („ De l'aplanissement universel du Cône droit „ (pp. 479-85. Planc. 10. Fig. 3. „ le 2. Août 1698.)).

(t) Vedansi i ll. cc. nella Nota (*l*) del Proemio, e segnatamente il primo ov' è scritto — *Hinc etiam emergit insignis Coni recti proprietas* &c.

(u) *Mémoires de Mathématique & de Physique présentés à l'Academie Royale des Sciences par divers Savans* &c. Tom. IX. *A Paris*, M.DCC LXXX. („ Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles de Surfaces développables &c. „ p. 382. (11. *Jan.* 1775.)).

(v) *Hist des Mathém Tom.* II. *A Paris*, *An* VII. (Par. IV. Liv. I. §. X. p. 94. „ *Il y a encore ici une chose remarquable & qui je ne sais si Viviani remarqua* &c. „)

sciolto anco nell' Opuscolo di Viviani sopra i Cieli o Volte degli Architetti, e da Gregory nella citata di lui soluzione (*x*). — Bossut nel *Saggio* indicato d' Istoria Matematica dà come noto il Viviani alla Repubblica delle Lettere nel 1692. per la sua *Divinazione* de' V. Libri de' Luoghi-solidi d' Aristeo (*y*): l' anacronismo si fa tosto palese dal solo sapersi come quest' Opera non vidde la pubblica luce fuorchè nel 1701. (*z*); e gli „ Atti degli Eruditi di Lipsia „ del 1694., ch' ei dice d' aver riletti, non potevan mancare di suggerirgli in termini puntuali, che quel Geometra Fiorentino celebravasi al tempo dell' *Enimma sferico* da lui proposto in virtù dell' altr' Opera tutta diversa stampata nel 1659. *Divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei* (*w*).

Ma tornando al nostro proposito della Vela (poichè troppo divagherebbeci rammentare i mancamenti ed equivoci, in cui son caduti trattando la Storia della Geometria antica e risorta parecchi anco egregj Scrittori), quando mai le verità geometriche, che diedero origine alla scoperta della medesima, si volessero fedelmente *datare* e disporre in ordine cronologico e rilevarne la mutua lor dipendenza, nesso, e natura, non si potrebbe a meno di riempire questa lacuna nel modo presso a poco, che siegue.

1. L' *Elica* d' Archita (sebben Elica vera non sia) segnata sopra un retto Cilindro o per dir meglio sulla di lui superficie, è il primo antichissimo passo, da cui dovrebbe-

---

(*x*) *Philosophical Transactions &c.* T. XVIII. p. 29. „ *Sed & hoc amplius &c.*

(*y*) *Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques.* Tom. II. c. p. 20.

(*z*) *De Locis solidis secunda Divinatio geometrica in quinque Libros injuria temporum amissos Aristæi senioris Geometræ &c. Opus Conicum in lucem prolatum anno* M. DCC. I. *Florentiæ &c.*

(*w*) *De Maximis & Minimis Geometrica Divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi hactenus desideratum &c. Florentiæ,* M.DC.LIX.

besi incominciare il racconto. Eutocio, che circa il fine del secolo V. (480.) o principio del VI. fiorì posteriormente a Pappo, sulla testimonianza d' Eudemo (Scrittore del IV. secolo avanti Cristo) somministra la descrizione di questa Curva nei suoi *Commentarj* alle Opere d' Archimede (*aa*). Risale dunque l' invenzione di essa al secolo V. (403) avanti l' Era Volgare; nè manca il Viviani fino dal 1676. di tenerne proposito in un Opuscolo quasi generalmente ignorato, massime dai moderni Geometri oltramontani (*bb*). Se la base del Cilindro sia il Circolo (Fig. 3.) DIAH, ho trovato che la Linea d' Archita nascerebbe alzando perpendicolarmente al piano del medesimo Circolo dai punti B, B', ec. le *medie* geometriche porporzionali tra AB, BC, o sivvero AB', B'C', ec., dopo circoscritto il Semicircolo ENDLP, ch' è quanto dire rette eguali a SQ, S'Q', ec. dopo condotte CQ, C'Q', ec. normali ad AD respettivo raggio e diametro. Ed è facile dimostrare, che l' altezza *massima* o colmo della Curva così descritta corrisponda al punto O, ove l' arco AO $= \frac{1}{3}$ AOD, ossia la corda AO (lato dell'Esagono inscritto) = AM = IM = all' altezza *massima* divisata: siccome

---

(*aa*) *Archimedis Opera quæ supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitæ Commentariis* &c. *ex recensione Josephi Torelli* &c. *Oxonii*, M.DCC.XCII. („ *De Sphæra & Cylindro* „ Lib. II. Prop. II. pp. 133-35-49, e segnatamente pp. 143-44 — *Qua* (ratione) *Architas*, *ut Eudemus tradit* (con Figura) — Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ ΩΣ ΕΥΔΗΜΟΣ ΙΣΤΟΡΕΙ — .

(*bb*) *Continuazione del Diporto Geometrico* ec., ed ivi „ Modi varj meccanici, lineari, e solidi „ tentati da V. V. per le costruzioni di due illustri Problemi, „ il primo della divisione dell'Angolo in data proporzione, il secondo dell' invenzione delle due „ Medie proporzionali. Firenze, „ M.DC. LXXVI. „ — *Enodatio Problematum Gallicorum*. *Florentiæ*, M.DC. LXXVII., ed ivi „ *Tentamenta varia ad Anguli trisectionem* &c. „ .

di più è manifesto, che l' *Elica* d' Archita si può svolgere dal primo Cilindro ed avvolgere sopra un Emicilindro, ch'abbia la base di raggio doppio EC'CDLP, ferme stanti le stesse *ordinate*, ed il *maximum* al punto N, dove $AO = ON$, $EN = \frac{END}{3}$, e AND Triangolo equilatero, ossia DN lato del regolare Esagono inscritto.

2. Dobbiamo a Pappo d' Alessandria, vissuto imperando Teodosio il Grande, se non la scoperta (che potrebb' essere anco molto anteriore all' epoca delle sue *Collezioni*), la prima notizia d' una parte geometricamente *quadrabile* di sferica Superficie, come può riscontrarsi nella Proposizione XXX. Problema VII. del Libro IV. (*cc*), determinata da una specie di Loxodromia o di Spirale sul Globo, in cui giacciono quei soli innumerevoli punti, ai quali corrisponda una *longitudine* sempre quadrupla della *latitudine* respettiva. Grandi, Hermanno, e Montucla lo seppero: alto silenzio di ciò s' incontra presso il comun degli Istorici: non lo ebbe nemmen presente il Viviani; ma non pertanto fa di mestieri avvertire, che la Medaglia coniatagli nel 1701. da Gio. Batista Foggini, che volle eternare il nome di sì grand' Uomo, e riportata nel Museo Mazzuchelli, affacci un Epigrafe indubitatamente appoggiato ad un fatto falso, dicendo di lui

QUI

(*cc*) *Federici Commandini Urbinatis* &c. *Commentaria in Libros octo Mathematicarum Collectionum* &c. *Pisauri* M DC. II. (pp. 59. a tergo e 60.). Non è già la Prop. XXXII. come assicurarono coll' Hermanno (ved. l. c. nella Nota (*m*) del Proemio) altri Geometri, poichè questa (Probl. VIII. p. 62.) tratta della trisezione dell' angolo. — Bossut, *Essai d'Histoire* &c. *Tom.* I. *Période* I. *Chap.* II. pp. 65-66. (Questo Storico fa fiorir Pappo a pag. 43. nell' anno 450. ed a p. 64. nel 385. prima di Cristo). — *Histoire des Mathématiques* &c. *Par J. F. Montucla. A Paris, An* VII. (Tom. I. Par. I. Liv. V. §. VIII. p. 330.)

QUI PRIMUS A . SAL . M . D . C . IIIIL . ET SPHAERICAS SUPERFICIES NIL RECTI HABENTES NOTIS RECTANGULIS OSTENDIT AEQUAS . *(dd)*

3. Viene dipoi la *quadratura* geometrica della Ciclocilindrica *primaria* di Roberval, e la misura delle *secondarie*, disegnate egualmente come le altre sulla superficie d' un Cilindro-retto, e mostrate eguali da lui (*ee*) (non già da Lalovera nel 1660. (*ff*), per quanto lo affermasse Montucla (*gg*), nè da Pascal (*hh*)) alla superficie d' un Cilindro obliquo o *scaleno*. Ora scoperta sì fatta per lo meno rimonta all' anno 1634. (*ii*), sebben pubblicata nel 1693. insieme con tutte le Opere postume del medesimo Autore. E la conformazione della metà di quella Curva *primaria* a doppia curvatura, che si descrive agevolmente col *compasso* a foggia d' un Cerchio, non solo è l' istessa degli *occhj* della Vela Fiorentina, ma oltrediciò staccata la Superficie ciclocilindrica (Fig. 3.) dalla Circonferenza AIDH della base del Cilindro, ed applicata

ta

(dd) Museum Mazzuchellianum, seu Numismata virorum doctrina præstantium, quæ apud Jo Mariam Comitem Mazzuchellium Brixiæ servantur &c. *Tom.* II. *Venetiis*, M.DCC. LXIII. (Tav. CXLV. Num. III. pp. 184-85.).

(ee) Divers Ouvrages de Mathématique & de Physique. Par Messieurs de l'Académie R. des Sciences a Paris, M.DC.XCIII. („ Traité des Indivisibles „ (pp. 213-21 30)) — *Mémoires de l' Académie R. des Sciences depuis 1666. jusqu' à 1699.* T. VI. *A Paris*, M DCC XXX. (pp. 293-328).

(ff) Veterum Geometria promota in septem de Cycloide Libris. Tolosæ, M.DC.LX. (Lib. II. Prop. XXVI. Corol. II.)

(gg) Histoire des Mathématiques &c. (prima Edizione) (Tom. II. Par IV. Lib. I. §. IX. pag. 56-7).

(hh) Bossut, Essai sur l'Hist. génér. des Mathém. &c. Tom. I. Par. III. Chap. II. pp. 303-4, in data del M. DC. LIX, — *Discours sur la vie & les ouvrages de* Blaise *Pascal* = ivi = Tom. II. pp. 370-383. Montucla *Hist. des Math.* Tom. II. Par. IV. Lib. I. p. 71. §. IX.

(ii) Bossut, *Essai* precitato, Tomo I., Periodo III., Capitolo II., pagina 295.

ta all' altra Semicirconferenza d' egual lunghezza ENDLP dell' Emicilindro corrispondente, s' identifica colla Semiellisse dell' Ungula *quadrabile* semiretta, non meno che la Superficie compresa o circoscritta dall' una trasformasi nell' Ungulare terminata dalla seconda. Ha poi così stretto rapporto la Linea *primaria* Robervalliana con quella di Pappo del Num. 2., ch' ella determina i punti sopra una Sfera, la *longitudine* de' quali pareggi sempre la *latitudine*, come rilevò Bernoulli nell' atto di sciogliere il Problema Fiorentino, e lo ha più stretto coll' Elica d' Archita del Num. 1., perchè sono le sue proprie ordinate *medie* geometriche proporzionali tra AB, BR, e AB′, B′R′, ec., (o sivvero eguali a *sq*, *s′q′*, ec.) siccome non isfuggì alla considerazione di Gregory: valendo l' istesso altresì per le *secondarie* quando le basi circolari de' Cilindri traforanti la Sfera avessero il loro diametro minore o maggiore del raggio della medesima; il che fu bene avvertito, non da Coursier (*kk*), ma da Grandi (*ll*), e d' onde nascono le Cicloconiche combinanti colle Ciclocilindriche. Non è dunque vero, come Leibnitz (*mm*), i Compilatori degli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi (*nn*), De la Hire (*oo*), Krafft, il Pseudanonimo precita-

to

(*kk*) *Opusculum de sectione Superficiei sphæricæ per Superficiem sphæricam, cylindricam, conicam. Item Superficiei cylindricæ per Superficiem cylindricam atque conicam. Denique Superficiei conicæ per Superficiem conicam. Parisiis*, M. DC. LXIII.

(*ll*) *Geom. dem. Vivian. Probl.* (*Scholium* dopo della Prop. XXIV. e suo Coroll. II. pp. 120-21-22.)

(*mm*, L. c. nella Nota (*g*) del Proemio, ove Num. 4. p. 277. rimanda a coloro in genere, *qui de Linea sinuum & Cycloide egere.*

(*nn*) *Histoire de l' Académie R. des Sciences. Année* M. DCC. VII. *A Paris*, M. DCC. XXX. („ Sur des quadratures de Superficies cylindriques, qui ont des bases coniques „ §. 2. p. 67.)

(*oo*) Tom. cit. *Mémoires* &c. — „ Quadratures de Superficies Cylindriques sur des bases Paraboliques, Elliptiques & Hyperboliques „ (1707.- 20. *Juillet*) (pp 330-38, Teoremi IV., Figg. 4., e segnatamente a pag. 330. in principio).

to (*pp*), ed altri Scrittori asserirono, che la *quadratura* dell' Ungula e dipendenti Triangoli cilindrici, nell' intero e nelle parti, sia l' opera di Pascal nè tampoco di Gregorio da San Vincenzo (*qq*), o di Wallis, o d' Halley, che l' applicò il primo di tutti alla teoria del Calore solare (*rr*). Pascal ha però il merito pregievolissimo d' aver dedotto dalle Ciclocilindriche di *data* anteriore le proprietà principali spettanti alle Cicloidi *oblongate* o *contratte*, in aumento di quella della Cicloide comune, che Mersenno prendeva per un' Ellisse (*ss*). Dalle di lui elaborate Proposizioni, venute a notizia del pubblico nel 1659., si può salire con pura Sintesi fino alle ricerche profonde della determinazione delle Formule degli Integrali dipendenti dalla *rettificazione* delle Coniche Curve (*tt*). Tuttavia io non ho ravvisato nessun Isto-

---

(pp) Commentarii Acad Scient. Imper. Petropolitanæ &c. *Tomus* VI. *ad annos* 1732-33. *Petropoli*, M.DCC. XXXVIII. (*Classis prima continens Mathematica*) („ De Ungulis Cylindrorum varii generis. Authore Georgio Wolffg. Krafft „ pp. 13-27, §§. 19., Tabb. II. III. Figg. 8) — *Actorum Erudit. quæ Lips. public. Supplementa. Tomus* IX. *Lipsiæ*, M.DCC.XXIX. (*Sectio* II. p. 45.).

(qq) P. Gregorii a Sancto Vincentio Opus geometricum quadraturæ Circuli & Sectionum Coni decem Libris comprehensum Antuerpiæ, M.DC.XLVII. (Tom. II. Lib. IX. P. III. Propp. 45-46-47 48, Par. IV. Prop. 76., pp. 991-92-93. 1012).

(rr) Philosophical Transactions &c. Vol. XVII. *For the Year* 1693. *London.*, M.DC.XCIV. (Num. 203. Sept. 1693. §. IX. p. 878. „ A Discourse concerning the proportional Heat of the Sun in all Latitudes &c. „ Fig. 8. 9. 10., e precisamente pp. 880-81, Fig. 9.).

(ss) Dimension des Lignes courbes de toutes les Roulettes (Ved., Oeuvres de Blaise Pascal. A la Haye, M.DCC.LXXIX. „ Tom. V. pag. 402. e segg.) *Lettera a' Filaleti di Timauro Antiate* (Carlo Dati) *della vera Storia della Cicloide, e della famosissima Esperienza dell' Argentovivo*. Firenze, 1663. pag. 4. — Mersenne, *Traité de l'Harmonie universelle*, Tom. II. (1637) (*Latin.*)

(tt) De Calculo Integr. Exercit. Mathem. (*Sectio* I. & II.) *Florentiæ*, M.DCC.XCII.

Istorico Matematico, ch'abbia fatto cenno, come doveva, di quanto fossero da apprezzarsi queste speculazioni difficultose per quell' età, e massime avendole derivate Pascal dall' immediata considerazione del Circolo e dell' Ellisse - cilindrica di Sereno (*uu*) o *Clypearis* de' Geometri Greci, nè ch' abbia mai motivata la maniera veramente originale, per mezzo di cui De la Hire nel 1692. giunse a provare la *quadratura* delle Ungule sì *primarie* che *secondarie*, non meno che la misura della superficie della Sfera, senza *indivisibili*, senza *limiti*, senza *infinitesimi*, senza *esaustioni* (*vv*). Questo è un pezzo di Sintesi, che a parer mio non ha eguale in tutta la Geometria degli antichi e moderni; ed è tanto più da stimarsi in quanto che l' istesso metodo si può applicare ad altre Ungule parimente *quadrabili*, come son tutte quelle elevate sopra Cilindri-retti, le basi de' quali girando intorno d' un asse genererebbero delle Superficie rotonde misurabili mediante l' area d' un Circolo, siccome accade, in seguito della scoperta fattane da Huygens nel 1657., dell' ordinario Paraboloide (*xx*).

4. Alla dimensione di quelle parti di Superficie sferica, che

---

(*uu*) *Apollonii Pergæi Conicorum Libri octo & Sereni Antissenis de sectione Cylindri & Coni Libri duo. Oxoniæ*, M. DCC. X.

(*vv*) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Depuis 1666. jusqu'à 1699. Tome X. A Paris*, M DCC. XXX. („ Nouvelle méthode pour demontrer le rapport de la superficie de la Sphére avec la superficie de son plus grand Cercle &c. avec la quadrature de l'Ongle cylindrique &c. „ (*Cuneus cylindricus*) (pp. 104-109).

(xx) *Christiani Hugenii Zulichemii, Constant F., Horologium Oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ. Parisiis*, M DC.LXXIII. (*Pars* III. „ *De Linearum curvarum evolutione & dimensione* „ pagg. 73-74-7$^{,}_{6}$, ed ivi (72) „ Lettera di Francesco Slusio „ de' 24. Dicembre M.DC.LVII., ch' è lo stess' anno dell' invenzione e pubblicazione dei nuovi Orologj o Cronometri (ved. pag. 1. *Annus agitur sextus decimus* &c.).

che fino dal tempo di Menelao o dalla metà del I. secolo si dissero Triangoli e Poligoni sferici, arrivò primo con una Sintesi assai più facile dell'adoprata da Alberto Girardo (*yy*) il celebre Cavalieri (*zz*) (di cui si conobbe il modo in Italia da Leibnitz (*ww*), imitato di poi da Coursier (*aaa*), Wallis (*bbb*), Lagny (*ccc*), e da Bossut nel suo *Corso* (*ddd*)), così che nè Bernoulli (*eee*) nè altri debbano dirsene con ragione i veri discopritori, quando poco avanti o all'occasione del Problema Fiorentino v' applicarono il Calcolo *differenziale* allora nascente. Fermat anticipò Barrow nell'idear la maniera di compianare la Superficie di qualunque Solido di ri-

---

(yy) *Invention nouvelle en Algébre*. M. DC. XXIX. — Montucla, *Hist. des Mathém. An.* VII. (Tom. II. Par. IV. Liv. 1 §. II. pag. 8.

(zz) *Directorium generale Uranometricum. Bononiæ*, M. DC. XXXII. (Par. III. Cap. VIII. *Axioma* 5. p. 316-7).

(ww) Nel l. c. dalla Nota *(g)* del Proemio si legge (pag. 275.) *Triangulum sphæricum tribus circulis magnis contentum* dudum *dimensi sunt Geometræ*.

(aaa) Clairaut, *Des Epicycloides sphériques* l. c. in calce pag. 294. (Ved. Nota *(m)* ultima del Proemio.)

(bbb) *Mechanica, sive de motu Tractatus geometricus* (Par. II Ediz. del M. DC. LXX., Cap. V. Prop. XXIV.).

(ccc) *Histoire de l' Académie des Sciences. Année* M.DCC XIV. *avec les Mémoires* &c. *A Paris*, M.DCC. XVII. (*Traité de la cubature de la Sphére, ou de la cubature des Coins & des Pyramides sphériques, que l'on démontre égales à des Pyramides rectilignes*, pp. 409 33, Planc. 16., Figg. 6.) (Ved. principalmente Corol. II. dopo il §. XXI. p. 427., la *Remarque* I. p. 430., e più di tutto i tre Num. della II. pp. 432-33).

(ddd) *Cours de Mathématiques. A Paris*, M DCC. LXXXI. (Tom. II. p. 239.)

(eee) *Jacobi Bernoulli* &c. *Opera* (Tom I. Num. XLII = *Specimen alterum Calculi differentialis* &c. §. III. *De areis Triangulorum sphæricorum*, p. 448) — *Acta Erudit. Lips.* (Jun. M. DC XCI p. 282. e segg. 287-88., Fig. IV.).

voluzione (*fff*): Wallis (*ggg*), Parent (*hhh*), e Senés (*iii*) dimostrarono i Teoremi d' Huygens del 1658. concernenti le Superficie dei due Sferoidi, e i due primi anco del Conoide Iperbolico d' Archimede, ma con un metodo assai complicato e riducibile a molto maggiore semplicità, come ho tentato nei *Perelliani*. Mancava la considerazione del Cilindroide Iperbolico, che Archimede neglesse (*kkk*); nè i primi a con-

tem-

(*fff*) Montucla, *Histoire des Mathém.* &c. (Tom. II. Par. IV. Liv. II. § VIII. p. 152.) ne referisce la scoperta fatta dal primo all'anno 1658., mentre le „ Lezioni Geometriche „ unite alle XVIII. „ Ottiche, del secondo furono pubblicate in Londra nel 1668-9.

(*ggg*) *Opera Mathematica* &c *Volumen* I. pag. 542. (*Tractatus epistolaris ad Hugenium* pp. 555-58).

(*hhh*) *Essais & Recherches de Mathématiques & de Physique. Par M. Parent* &c. *A Paris*, M. DCC. XIII. (Vol. III. *Mémoire* XXXI. „ Supplément sur la Géométrie, & sur la Statique d' Archimede „ pp. 486-500) („ Table, Eclaircissemens, & Supplémens „ Num. XXXI.) (*Planc.* 29 Prop. VI.)

(*iii*) *Histoire de l'Académie R. des Sciences. Année* M. DCC. XIX. *Avec les Mémoires* &c. *A Paris*, M. DCC. XXI. (— *Nouvelles manieres de toiser les Voûtes en Cul de Four, ou en Dôme surhaussées & surbaissées, & les Voûtes en Arc de Cloître & d'Arête. Par M. Senés* (pp. 363-415., Planches 25-26-27, Figg. 53., e sopra tutto Problema I. pp. 369-72. Planc. 25. Fig. 5., e Probl. II. pp. 375-79. Planc. 25. Fig. 8. — *Histoire de l'Académie* &c. *Année* M. DCC. XXII. *A Paris*, M. DCC. XXIV. (*Mémoires*) (*Addition sur le Toisé des Voûtes* &c. *Par M. Senés*, pp. 356-76, Planc. 18., Figg. 19.) entrambe spedite dalla Società R. di Montpellier) — Trattato della misura delle Fabbriche ec. di Giuseppe Antonio Alberti „. Venezia M. DCC. LVII. (Par. III. Cap. XI. pp. 120-185-209) — „ Monconys, Voyages &c. „ *De dimetiendis Fornicibus decussatis* „.

(*kkk*) Difatti *Anti Conoide Iperbolico* fu nominato questo Solido *nuovo* da Vincenzo Viviani (Ved. *Scolio* accennato dalla Nota (*d*) precedente.)

templarlo furono Wren (*lll*) e Wallis (*mmm*), come comunemente gli Istorici insegnano, ma bensì Cavalieri nel 1635. sotto nome di *Tympanum Hyperbolicum* (*nnn*), cui, e non a Gregorio da San Vincenzo, si debbe eziandio la conversione della Spirale in Parabola (*ooo*). V' aggiunse Parent la misura della di lui Superficie (*ppp*): Cotes, oltre di questa, assegnò la dimensione dell' altra spettante al Solido Iperbolico-acuto considerato da Torricelli (*qqq*). Ma quello ch'è ancor più valutabile, trovò l'istesso Parent uno Sferoide *oblato* o compresso inscritto in un Cilindroide, le superficie d'entrambi i quali, sì nell' intero che nelle parti, s' adeguassero infra di loro (*rrr*) (Problema tentáto invano da Huygens (*sss*)) come

---

(*lll*) *Philosophical Transactions* &c. Num. 53. *For the Year* M.DC.LXIX. Vol. IV. *London*, M.DC.LXX. (15. Nov. Fig. *Wrens Engin*) (*A description of Dr. Christophor Wren's Engin, designed for Grinding hyperbolical Glass; as it was in a manner promised numb.* 48. pp. 961-62) (pp. 1059-60) (21. Giugno).

(*mmm*) *Mechanica, sive de motu Tract. geom* (Pars. II. Prop. XXXII.) M.DC.LXX. (*Opera Mathematica*, Tom. I. *Oxoniæ*, M.DC.XCV. pp. 930-38, Fig. 215-248).

(*nnn*) *Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* &c. *Bononiæ*, M.DC.XXXV. (Lib. V. Teor. 29. Prop. 30. Coroll. 21-24. pp. 75-77) (Coroll. 25-27 — pp. 77-79).

(*ooo*) = Ivi = Lib. VI. Prop. IX p 13. e segg. — Montucla &c. P. IV. Lib. I. §. VI. p. 41. T. II.

(*ppp*) *Essais & Rech.* &c. M.DCC. XIII. Vol. II. (*Manière très-simple de tailler les meules hyperboliques* etc. pp. 645-62 (*du* 21 *Jan.* 1702.) „ *J'ajoûterai seulement ici* &c. „ p. 661. Planc. 14. Figg. 2. 3.) — Vol. III. Planc. 29., VI. Prop., p. 486., Figg. 5. 6. *Suplément pour les* surfaces *des Sphéroides*, *des Conoides*, *&* *des* Cylindroides &c.

(*qqq*) *Harmonia mensurarum* &c. „ Edidit & auxit Rob. Smith, „ *Cantabr.* M. DCC XXII. (p. 22. e p. 94., colle Note di Smith alle pp. 107-114).

(*rrr*) *Histoire de l' Academie Royale des Sciences* &c. M. DCC. IX. *A Paris*, M DCC. XXXII. (Geométrie „ pp. 57-58.) *Mémoires* alle pp. 118. e seguenti).

(*sss*) Si riscontri l'*Horoll Oscillat.* &c., ove a pag 76. evvi un Problema *analogo*, non risoluto neppur esso generalmente, — *Dato enim quovis lato Sphæroide* &c.

la superficie della Sfera rispetto a quella del circoscritto Cilindro. Di questa segnalata scoperta o tacciono affatto gli Storici o non le danno quel peso ed encomio, che merita, quantunque ella sia il fondamento dell' altra, che il Geometra di Siracusa apprezzò sopra tutte facendola incidere nella lapida del suo sepolcro (*ttt*), e diventa un particolarissimo caso della moderna, e porta seco il *paradosso* medesimo della circonferenza d' un Cerchio eguale al suo centro, che a Galileo tanto piacque derivandolo dal celebre *Cyato* o Scodella emisferica (*uuu*), generalizzata da Torricelli a tutte le Coniche (*vvv*). In ultimo luogo i due Bernoulli seniori immaginarono sul finire del secolo XVII. d' amplificare la Vela Fiorentina sopr' altri Solidi tondi o Sferoidi o Conoidi (*xxx*).

5.

(*ttt*) *Tusculanarum Quæstionum Lib.* V. §. XXIII. p. 4.-82. = *Marci Tullii Ciceronis* (omnia) *Opera in usum Ser. Delphini*, *Tom.* II. *qui Philosophicorum primus*. *Patavii*, M. DCC. LIII. — *Plutarchus in Vita M. Claudii Marcelli* — *Histoire de l'Académie des Inscriptions & Belles-Lettres avec les Mémoires* &c. *A Paris*, M.DCC.XLIII. Tom. XV. (Melot, *Recherches sur la vie d'Archimede* &c. pp. 128-143.) — Notizie istoriche della vita, scritti, e invenzioni d' Archimede, per il C. Gianmaria Mazzuchelli,,. Brescia, M DCC. XXXV.

(*uuu*) Dialogo I. Giornata I. *intorno a due nuove Scienze* &c. (Tom. II. Firenze, M. DCC. XVIII. pp. 497-98.) — *Acta Eruditorum Lipsiæ anno* M. DCC. XV. *pubblicata* (*Mens. Januar.* p. 44. *Tab.* I. Fig. I. = *Galilæus olim per jocum*, *ut puto* &c.)

(*vvv*) MS. Palatino delle Opere inedite di Evangelista Torricelli, esistente nella Biblioteca del R. Museo di Firenze (Fascicolo intitolato da Viviani *Coniche varie piane e solide*).

(*xxx*) *Johannis Bernoulli* &c. *Opera omnia*. *Lausannæ & Genevæ*; M. DCC XLII. *Tomus* I (Num. XXX. *De complanatione Superficierum Conoidearum & Sphæroidearum* &c. pag. 155.) — *Acta Eruditorum Lipsiæ* (Jun. M.DC.XCVI. p. 264.) — *Jacobi Bernoulli* &c. *Opera*, *Tomus* II. (Num. LXXIII. *Complanatio Superficierum Conoidarum & Sphæroidicarum* (Incomincia *Occasione Problematis Florentini* &c.) Tab. XXXII. pp. 739—41) *Acta Erud. Lip. Oct.* M. DC. XCVI. p. 479.

5. Furon gli Anelli (Σπειραι) avanti d' ogni altro nel 1615. quanto alla solidità loro introdotti nella Geometria e misurati da Kepler (*yyy*), indi più latamente considerati da Roberval, Cavalieri, Viviani, e Guldino, ma a perfezione ridotti mediante un Teorema del Roccha (*zzz*), e finalmente da Torricelli, il quale nel 1644. spinse le sue ricerche geometriche fino ad assegnare le dimensioni degli Anelli formati in figura di *chiocciola* o a passi di *Vite* eguali o diseguali comunque (*wwww*), tacendolo nelle loro *Istorie* Montucla e Bossut. Non prima del 1651-59. assegnò Tacquet il modo di misurare le Superficie dei Solidi Annulari (*aaaa*), ed ai giorni nostri circa il 1757. Perelli dei Cocleari (*bbbb*). Perdutesi le dimostrazioni di lui ho cercato ristabilirle ne' miei *Perelliani*, aggiungendovi le proprietà elegantissime delle *Spiriche* (Σπειρικαὶ) chiaramente descritte da Proclo (*cccc*), una del-

---

(yyy) *Nova Stereometria Doliorum vinariorum, in primis Austriaci* &c. (*Additamentum*). *Lincii*, M. DC. XV.

(zzz) *Opera Geometrica Evangelistæ Torricelli* &c. *Florentiæ*, M. DC. XLIV. (*De dimensione Parabolæ, Lemma* 31. p. 76.)

(wwww) *Appendix de dimensione Cochleæ* (pag. 130. della seconda numerazione nella *Raccolta* sopraccitata di tutte l'Opere edite Torricelliane).

(aaaa) *Opera Mathematica R. P. Andreæ Tacquet* &c. *Antuerpiæ*, M. DC. LXIX. (Tom. II. *Cylindricorum & Annularium libri quinque, seu Cylindrica & Annularia quinque Libris comprehensa* (Lib. IV. Prop. 26. - Lib. 5. Prop. 14. p. 121).

(bbbb) *Paulli Frisii Operum Tomus primus Algebram, Geometriam, & Analyticam continens. Mediolani*, M. DCC. LXXXII. (Problema CXX. pp. 386-87-88. Coroll. II.) — „ Giornale de' Letterati „ Tomo LIII. Pisa, M. DCC. LXXXIV. (*Lettera del Sig. Abate Frisi a Monsignore Angelo Fabroni* pp. 44-45).

(cccc) *Procli Diadochi Lycii* &c. *Commentarius in primum Elementorum Euclidis. Libri quatuor latine versi a Francisco Barocio. Venetiis*, M. D. LX (Lib. II. Cap. XI. pp. 64-68-72, e Lib. IV. in principio) — G. Cramer, *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes Algébriques* &c. *Geneve*, M. DCC. L. („ Préface, pag. VI. sotto la de-

delle quali (forse la *mirabilis* degli Antichi (*dddd*)) ha la sua area tripla appunto di quella del Circolo inscritto come la Cicloide ordinaria o Galileana. Quell' Anello finalmente proposto da Parent come analogo al Cilindro e alla Sfera, perchè eguale in superficie e solidità sì nell' intero che nelle parti alla Sfera inscritta (*ecee*), non è vero *anello*, ma porzione di Sfera. Imperciocchè (Fig. 4.) tale Anello vien generato dalla rotazione del Segmento *quadrantale* ASB intorno dell' asse EF della gran sfera ESFT: laonde la sua superficie cilindrica interna nel tutto e nelle parti pareggia quella della piccola Sfera QRPM, e la solidità nel tutto e nelle parti quella dell' altra Sfera di diametro AB (pel *Teorema* notissimo Torricelliano (*ffff*)) o sivvero della Sfera inscritta; mentre (soggiungo) la superficie esterna del medesimo Anello, parimente nel totale e nelle parti omologhe, sta all' interna ed a quella della Sfera inscritta come $OA : OR = \sqrt{2} : 1$, ch' è quanto dire nella ragione costante *Platonica* della diagonale d' un Quadrato al suo lato.

OSSER-

---

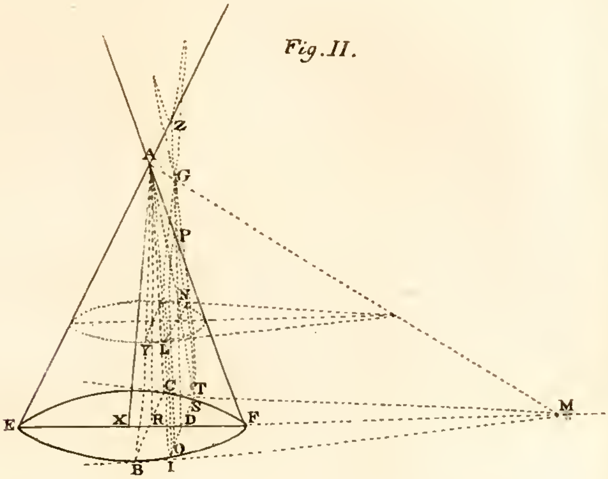
nominazione falsa di *Spirali*) — Montucla, *Hist. des Mathématiques* &c. An. VII. (Tom. I. Par. I. Liv. V. §. V. p. 316. Fig. 77. Planc. X.)

(dddd) *Curvi ac Recti proportio a Bartholomæo Severo Friburgensi* &c. *promota Libris sex Patavii*, M. DC, XXX. („ Præfatio ad Librum V. „ p. 273. *Paradoxæ Menelaus* &c.) — *Pappi Alexandrini Collectionum Mathematicarum Liber* IV. (dopo della proposizione XXX. pag. 61. citata)

(ecee) *Essais & Recherches* &c., M DCC. XIII. Tom. III. *Mémoire* XXXI. (§. 10. pp. 522-25. Planche 30. Fig. 12) — *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*. *Année* M DCC. IX. *A Paris*, M. DCC. XXXIII. (*Problême géométrique* &c. (1709. 23. *Mars*) pp. 118-31, e segnatamente Fig. 4.)

(ffff) *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana*. Tomo VII. Verona, M. DCC XCIV. („ Lettera sopra diversi Aneddoti matematici &c. „ pag. 319. — *Nota* (*d*) pag. 332.)

Fig. II.


Z
A
G
P
N
Y
L
C
T
S
E
X
R
D
F
O
B
I
M

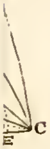


Fig. IV.

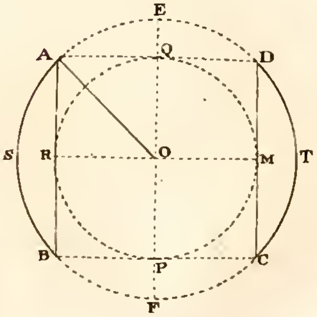

E
A
Q
D
S
R
O
M
T
B
P
C
F

Fig. I.

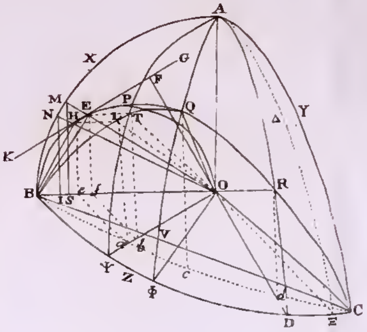

A
X
G
F
Y
M
E
P
Q
Δ
N
H
L
T
K
B
I
S
e
f
O
R
V
a
b
Ψ
Z
Φ
c
d
D
Ξ
C

Fig. II.

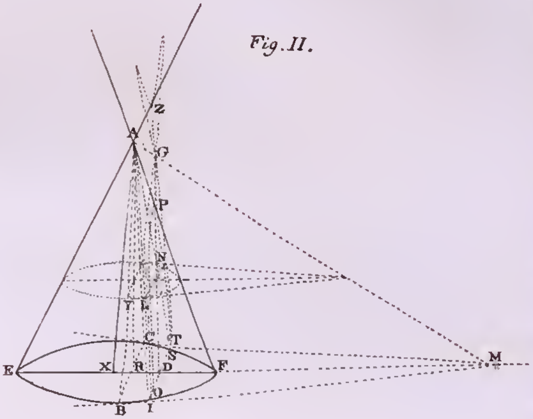

Z
A
G
P
N
Y
L
C
T
S
E
X
R
D
F
M
O
B
I

Fig. III.

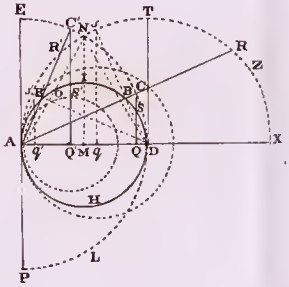
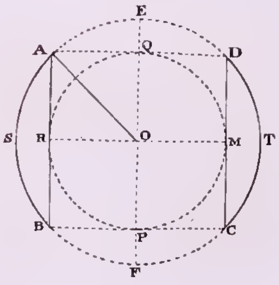

E
C
N
T
R
R
Z
B
O
S
B
C
S
A
q
Q
M
q
Q
D
X
H
L
P

Fig. IV.


E
A
Q
D
S
R
O
M
T
B
P
C
F

OSSERVAZIONI

Di Carlo Amoretti

SULLE ANGUILLE

Al Socio Emerito Giambattista Venturi

Ricevute il dì 14. *Febbrajo* 1803.

M' è avvenuto negli scorsi giorni di fare un' osservazione che parmi nuova ed importante, e che, sebbene non sia stata fatta con tutti i lumi, e con tutti i mezzi che richiedeansi per trarne il maggior profitto, pure può servire almeno d' indizio agli indagatori della Natura per venire in chiaro d' una verità, che da *Aristotele* sino al cel. concittadino vostro e nostro amico *Spallanzani* (di cui la vostra Università piange e piangerà, tem' io, lungo tempo la perdita), i più gran Naturalisti ricercarono invano. A questo titolo a voi la scrivo, a voi mio buon Amico e Collega, che in molta parte già ben indagaste, e in ogni parte di conoscer tentate la storia della Natura.

Questa osservazione diede poi luogo ad un' altra che havvi uno stretto rapporto; e che, se non conduce alla spiegazione del fenomeno, serve almeno ad escludere alcune asserzioni, e alcune ipotesi pronunciate e sostenute da valenti Scrittori ad esso relative. Forse m' inganno sul giudizio che ne porto; ma son sicuro di non esporre se non ciò che osservai: e se pur erro, potrà giovare, mettendo in guardia gli altri, lo stesso error mio.

L' osservazione, di cui parlerovvi in primo luogo, fu da me fatta su un' Anguilla. È così all' oscuro la generazione delle anguille, che mentre alcuni asseriscono d' aver vedute in esse le uova e l'ovaia, altri dei tempi dello *Stagirita*, che riputolle figlie di putredine sino a *Linneo*, asserirono ch'esse sono vivipare; e credè ognuno d'appoggiare le proprie asserzioni ad osservazioni moltiplici e incontrastabili nel tempo stesso che argomentavasi di mostrare mal istituite, e insussistenti le altrui. Voi leggeste senza dubbio presso *Monti* (*a*) *Mondini* (*b*) e *Spallanzani* (*c*) sullodato la storia delle opinioni de' Filosofi sì antichi che moderni su questo argomento.

Nello scorso Giugno (1801) essendo a Desio nella villa Cusani che voi ben conoscete, ci fu recata viva un'anguilla presa in un canaletto de' vicini prati, che pesava 56 once, ossia due libbre grosse Milanesi. Voi sapete che in quell'amenissimo giardino corre un forte canal d'acqua, che vi forma un vaghissimo laghetto e poi n'esce a foggia di fiumicello, e va tutto ad impiegarsi, diviso in cento rivoletti, all'innaffiamento de' prati distanti un miglio, in un de' quali fu presa l'anguilla rimastavi quasi in secco.

Questa, dopo d'essere stata due giorni a nuotare in un piccol recipiente del giardino medesimo, fu destinata alla cucina. Mi venne allora pensiere di vederne l'interna conformazione; e poichè ivi pur era il Dott. *Perroncini* valente Medico e Chirurgo fornito de' ferri dell'arte sua, insieme andammo all'esame.

Il cuoco taglionne il ventre sin presso all'ano. Ivi cominciammo ad esaminare le cose più diligentemente, tagliando il Dott. *Perroncini* co' suoi ferri que' visceri colla dovuta attenzione.

Trovammo in mezzo alle viscere presso al luogo ove *Mondini* nella fig. 1. della sua notomia dell'anguilla colloca l'intesti-

---

(*a*) De Anguillarum ortu & propagatione Comm. Bonon. Tom. VI. pag. 39.

(*b*) De Anguillæ ovariis. Ibid. pag. 406.

(*c*) Opuscoli due sopra le Anguille. Viaggi alle due Sicilie; Tom. VI. pag. 193.

testino, un corpo bianco di circa due linee di diametro, lungo più d' un pollice, il quale nella superficie era sparso di varj globetti, che ben vedeansi ad occhio nudo, e benissimo si discerneano coll' occhio armato di lente. Colla lente medesima vedemmo, dopo che n' avemmo reciso un pezzo lungo circa mezzo pollice, nell' interno di questa sostanza una quantità di corpicciuoli o globetti bianchi, ma molto più piccoli de' primi. L' annesso disegno darà meglio che le parole un' idea di ciò che ivi vedemmo. A è la grandezza del pezzo reciso: *a* sono due de' globetti esterni, *c* uno degli interni, B *b* *d* rappresentano gli oggetti medesimi veduti con occhio armato di lente.

Noi non avevamo alla mano libri che ci servissero di norma nelle ricerche che dovevamo fare. Io ricordavami che uno de' mezzi usati da' Naturalisti per distinguere le uova dalle altre sostanze oviformi, era il rompere alcun globetto crudo, e veder se ne usciva un licor viscido come uscir suole dalle uova de' pesci; e quindi altri farne cuocere, e vedere se acquistavano quella consistenza, che le uova degli altri pesci cuocendo acquistano. Ciò facemmo. I globetti crudi, al tagliarsi lasciaron vedere la materia viscida che conteneano. I globetti cotti trovaronsi sodi, e come i cotti uovicini poterono in due parti tagliarsi. Noi non vi facemmo altre osservazioni. Mia cura fu allora di far disegnare dal bravo *Luigi Villoresi*, che con suo padre alla cura di quel giardino era addetto, e quindi immergere nello spirito di vino il pezzo reciso della da me sospettata ovaia dell' anguilla.

Leggendo in appresso le Dissertazioni di *Monti* e di *Mondini*, e gli Opuscoli di *Spallanzani*, ben vidi quanto difficil cosa sia il determinare se i corpicelli sferici, che trovansi aderenti ad alcun de' visceri dell' anguilla, o in esso contenuti, siano veramente uova anzichè otricoli adiposi, o l' effetto d' una malattia e sostanze morbose oviformi; nè su questo punto oso decidere. Osservo bensì non doversi trovare strano che alcune uova siano al di fuori dell' ovaia, siano di diversa mole, e maggiori delle interne siano le esterne: imperocchè anche ne' Barbi, e ne' Carpeni osservò *Mondini* le uova di mole differente; e molti sono gli ovipari che emetton le uova a poco a poco; e queste, a misura che devon essere emesse, ingrossano. Nelle anguille medesime quei che crederono di vedervi le uova, e forse ve le videro, ne scorsero di grandezza diversa.

Certamente il corpo bianco cilindrico, dentro e fuori ovifero, non s' assomiglia nè all' ovaia di *Vallisnieri*, nè a quella di *Mondini*; ma poichè *Spallanzani* opina che non solo il primo, pur quest' ultimo siasi ingannato prendendo per uova gli otricelletti oleosi, resta ancor luogo ad un' ipotesi, che fondata su posteriori e più esatte ricerche, più si avvicini al vero o 'l raggiunga. Io non ad altro miro con questo scritto, se non che i Naturalisti, e specialmente quelli che son valenti in Notomia, se per accidente avvien loro d' osservare un simil fenomeno, meglio l' osservino di quel ch' io ho potuto e saputo fare.

Ma frattanto che si pensava ad esaminar l' anguilla, e anche ad assaporarla, si cominciò a pensare donde quell' anguilla poteva esser colà venuta; e ci fu impossibile non che difficile l' indovinarlo, a meno d' ammettere che le anguille vivano e si propaghino in que' pochi fondi uliginosi e torbosi, dond' escono i varj rivi, che formano il mentovato canale d' acqua, detto volgarmente la *Roggia di Desio*, perchè all' irrigazione de' contorni di quel borgo fu condotta. Vero è che giunta nella villa Cusani, dopo d' aver servito all' utilità e all' ornamento del luogo, arrestasi a formare, come già dissi, un vaghissimo laghetto abbellito dalla natura quanto dall' arte, e di pesci abbondantissimo; ma quel laghetto, pochi mesi prima, non solo era stato interamente asciugato, ma pur erane stato tolto tutto il fondo limoso destinato a concimare i campi, onde non può sospettarsi che in esso un' anguilla stesse dianzi celata, e a tanta mole, senz' essere mai vista, sia cresciuta. Si presero bensì, son ora circa 25 anni, in una vasca ampia e profonda, all' occasione che venne asciugata, dodici grossissime anguille; ma sapeasi che v' erano state messe molti anni prima: e fe allor maraviglia come quelle anguille fossero grandemente cresciute e non moltiplicate, non essendosene trovate nè in maggior numero, nè di varia grossezza, mentre gli altri pesci annualmente vi propagano la loro specie. Altronde era certo che da quella vasca le anguille non poteano portarsi nella *Roggia*, e ne' prati, non essendovi nessuna comunicazione.

Con tutto ciò si convenne non esser impossibile che quell' anguilla pescata nei laghetti di Pusiano, o di Civate, ove cotanto questi pesci abbondano, per qualche accidente sia stata gettata nel canale Desiano. Ma quì si cominciò a ricercare, ragionando delle cose nostre, come nel testè mentovato laghetto di Civate, (il quale or non fa più parte del Lago Eupili in cui, ai tempi di *Plinio* (*a*), entrava, e da cui usciva il fiume Lambro), e nel Lago d' Orta, detto altre volte Ludio, presso al Verbano, le anguille si generino, e copiosamente si moltiplichino, cosicchè una quantità grandissima sen' pesca, senza che anguilline mai vi si veggano nè da altro luogo possano venirvi.

E per comprendere la difficoltà della cosa, due notizie convien premettere. L' una è che i più fra i Naturalisti, e fra questi lo *Spallanzani* (*b*), tengono che le anguille a certo tempo dell' anno portinsi al mare per procrearvi le anguilline, le quali poi ad altra stagione opportuna dal mare ne' fiumi e negli stagni ritornino. Tali erano, secondo lui, le anguilline filiformi innumerevoli che *Redi* fece pescare cogli stacei nell' Arno; e tali pur sono quelle che prendono sulle fascine all' ingresso della palude i pescatori Comacchiesi. Il Sig. *Senebier* (*c*) scrive che dall' Oceano pel Reno, e per va-

---

(*a*) Hist. Nat. lib. 3. cap. 19.

(*b*) Loc. cit. pag. 242.

(*c*) Presso *Spallanzani* loc. cit. pag. 245.

rj canali vadano le anguilline nuotando contr' acqua sino al Lago di Neuchatel, e soggiunge che se non vi sono anguille nel Lemano, egli è perchè esse non possono salire pel Rodano ove perdesi e scorre sotterra.

L' altra cosa da sapersi è che i due mentovati Laghi d' Orta e di Civate hanno per loro emissario un angusto canale, su cui, poco lungi dall' uscita, v' è tal congegno da prendere tutte le anguille di certa grossezza, che pel canale tendono ai Laghi Lario e Verbano; e quindi forse per l' Adda e pel Ticino, al Po e al Mare. Consiste questo congegno in una cassa larga quanto l' emissario medesimo, il cui fondo è formato di grosse e quadrate verghe di ferro, che lasciano fra l' una e l' altra lo spazio di poche linee, pel quale l' acqua esce e precipita nel canal sottoposto, tenuto a quest' oggetto considerevolmente più basso; mentre nella cassa restano le anguille, che son maggiori di quelle fessure.

Or come mai le anguille e le anguilline, che forse potrebbono rimontare il canale, saliranno esse perpendicolarmente alla cassa summentovata, e penetreranno fra le angustie de' ferri in essa e nel canale superiore? Aggiungasi che riguardo al Lago di Civate, più difficil ancora, per non dire impossibile, è la salita all' anguilla, che venir vi voglia dal Lario; poichè, adoperandosi a Paré (villaggio presso questo Lago) a servigio d' una fucina l' acqua dell' emissario, questa cade da una assai considerevole altezza, fra le ale delle ruote, in mezzo alle quali sembra impossibile che un pesce qualunque possa salire; e tanto meno le anguille che non hanno, o non è nota almeno, la facoltà di balzare dal basso all' alto come le Trotte de' rivi alpestri. Che se il Sig. *Senebier* reputa impossibile la montata delle anguille e anguilline per quella parte di Rodano che corre in una profonda e angusta fessura, tale però che potè navigarsi felicemente dal Cittadino *Boissel* (*a*), ben più a ragione si può di-

---

(*a*) Journal des mines. Thermidor. An. IV. pag. 51.

dire impossibile la salita delle anguilline pe' mentovati congegni, e per le cascate de' canali moventi le ruote.

Di più: interrogai più volte i nostri pescatori in ogni luogo ove pescansi anguille, per rilevarne e ciò che avevan' osservato riguardo alle loro emigrazioni, e ciò che pensavano riguardo alla generazione loro. Rilevasi dalle loro risposte, che le anguille se ne vivono quiete ne' laghi, occupate solo a nutrirsi di pesciuolini e insetti acquajuoli, non avendo mai come gli altri pesci il tempo degli amori e della frega. Che se formasi in aria un temporale, esse il presentono, come se l'agitazione cominciasse in fondo al Lago; e allor fuggono avviandosi sempre a favor d'acqua, e vanno finchè possono, e forse sino al mare; nè mai tornano indietro.

Vero è che *Spallanzani* pretende che le anguille per naturale istinto vadano contr' acqua, e che *Redi* prese nello staccio, e i Comacchiesi prendono nelle fascine le anguilline che rimontano l' Arno, e 'l Po; ma io posso dire che quanti pescatori ho interrogati, tutti m' hanno assicurato della loro persuasione almeno, che le anguille viaggino sempre a favor d'acqua; del che una prova certissima è, ch' essi mettendo le nasse negli emissarj de' laghi, e nelle gole de' fiumi, mai non prendono un' anguilla nelle nasse aperte al pesce che vien contr' acqua, e molte ne prendono nelle nasse tese ai pesci che vanno a seconda dell' acqua.

Interrogati poi i medesimi pescatori se ne' mentovati laghi vider mai anguille pregne d' anguilline o d' uova, essi mi assicuraron di non averne vedute mai; se non che taluno dissemi d' aver vedute le anguilline negli intestini; ma descrisse la cosa in modo che ben mostrava esser quelli i vermi intestinali, che veder sogliono tutti i notomizzatori d'anguille.

Richiesti alla fine come pensavano che le anguille si generassero e si moltiplicassero, dissermi con sicurezza, come se testimonj fossero stati le mille volte dell' adulterino connubnubbio di que' pesci, che, vedendosi anguille di color cupo, e altre di color chiaro (il che *Spallanzani* attribuisce a età diversa), essi teneano per fermo, che le prime fosser figlie d' una Tinca e d' un Barbo; e quelle di pelle più chiara nate pur fossero da una Tinca; ma avessero per padre un Luccio: alcuni anche n' udii, che altro padre alle anguille assegnarono; ma non mai altra madre che la tinca. È vano poi il dirvi con quante osservazioni, fatte però non da Fisico, ma da Pescatore, e con quante ragioni coniate nel loro cervello, pretendessero persuadermi della verità del loro sistema sulla generazione delle anguille. Se io lor chiedea se mai videro anguilline o ne presero: no, mi rispondeano, perchè queste sempre stanno nel fango o rasentano il fondo, onde mai non danno nelle reti; e se talora entrano nelle nasse, n' escono agevolmente per la loro sottigliezza; per la qual cosa le più piccole anguille che prendansi, hanno per lo meno la grossezza del dito mignolo.

Comunque io ammirassi l' ingegno di que' pescatori nel difendere dalle mie difficoltà il loro sistema dello ibridismo delle anguille, voi ben immaginate, che non mi lasciai persuadere al segno di adottarlo, ma dalle osservazioni loro e mie deduco: 1.°, che le anguille ne' due mentovati nostri laghetti non vengono dal mare, nè da laghi che col mare liberamente comunicano; ma che in essi si generano, sicuramente per mezzo de' loro simili, e si riproducono in grandissima copia, probabilmente deponendo le uova a poco a poco, nelle parti più ritirate de' medesimi. 2.° Che non a certi periodi ne partono, ma in ogni stagione, quando il tempo procelloso annunzia un disequilibrio d' elettricità fra 'l cielo e la terra, ch' esse prima degli altri sentono, forse perchè più d' ogni altro pesce strisciano sul fondo de' laghi, e più probabilmente perchè hanno organi all' elettricità più sensibili, e certamente un qualche rapporto colla nota anguilla tremante (*Gymnotus electricus*) di Surinam.

CA-

CATALOGO

DI STELLE BOREALI

Di Antonio Cagnoli

Ricevuto il dì 17. *Febbrajo* 1802.

La Germania, l'Inghilterra, la Francia hanno creato Cataloghi di stelle: l'Italia non ancora. Della prima son rinomati quelli di Mayer e di Zach: della seconda quei di Flamsteed, di Bradley, di Maskelyne: della terza quei di Lacaille, di Delambre, e dei Lalande zio e nipote; l'ultimo de' quali non giunto forse per anco

Nel mezzo del cammin di nostra vita,

ha determinato più luoghi di fisse egli solo, che tutti gli antecedenti insieme.

Intrapresi a far sì, che anche l'Italia potesse dire d'averne prodotto uno. Se non che presuntuoso per avventura sarà per parere il mio tentativo, siccome effettuato con Istromenti di mediocre grandezza, quali poteansi dalle piccole mie facoltà procacciare. Mi lusingai supplire, con intensissima diligenza nell'indagarne gli errori, e con la moltitudine delle osservazioni, e quasi quasi oso dir che il successo non ha tradito le mie speranze.

Il piano da me concepito era assai circoscritto ma ragionato: di voler cioè stabilire, ad ogni mezzo grado di declinazione boreale, la posizione di quattro stelle, non minori della sesta grandezza; trascelte, per quanto ho potuto, a sei ore circa di distanza l'una dall'altra. Se non che questo piano ha dovuto restringersi ancora notabilmente, sì per mancamento del prefisso numero di stelle ne' luoghi desiderati, sì per deficienza di salute o di tempo. Ho eseguito le osservazioni, parte negli anni 1783, 1784, in una specola da me apprestata in Parigi; parte in un' altra, che ho eretta nella mia casa in Verona, e della quale a tal uopo principalmente mi son valuto dal 1788 al 1792. Un anno di vertigini le ha troncate avanti il divisato termine, e son rimaso incapace di ripigliarle senza manifesto pericolo di maggior danno.

Dai cangiamenti successivi del mio domicilio, per essermi stato conferito un posto d' Astronomo nell' Osservatorio di Milano, poi quello che tengo attualmente di Professore di Matematiche nella Scuola Militare di Modena, mi fu talora impedito, talora interrotto l' enorme travaglio de' computi. Finalmente mi è stata di tanto propizia la sorte, da farmi trovare nel Chiar. Ab. Cesaris, celebre Astronomo in un Osservatorio dei meglio forniti del mondo, graziosa condiscendenza a supplire in gran parte all' opera delle osservazioni. Posso una volta, a capo di vent' anni, produrre a luce il frutto d' innumerabili fatiche.

In fra tanto si è posto ad eguale impresa, ma con viemigliori mezzi, e con più vasto disegno, il Chiar. P. Piazzi, da cui si attende pubblicato quanto prima un Catalogo copiosissimo, e degno senza dubbio della perizia ed accuratezza, delle quali ha già dato luminose prove.

Le mie osservazioni sono state fatte con un quadrante mobile di tre piedi di raggio; armato d' un cannocchiale acromatico con due lenti obiettive del diametro di due pollici; d' un nonio; e di eccellenti micrometri, l' uno esteriore a vite, l' altro interiore a fila, in ciascuno de' quali si distingueva il minuto secondo: con un Istromento de' passaggi, munito di micrometro esterno, livello, ed altri sussidj per ricondurlo nel meridiano; il cui cannocchiale, acromatico, aveva $3\frac{1}{2}$ piedi di foco, e 28 linee d' apertura; e con un pendolo astronomico *à remontoir*, val a dire il cui peso lievissimo risaliva ogni due minuti, mediante un gioco di ruote separato da quelle del movimento.

I due primi istromenti furon lavoro di Megnié, che in Parigi godeva allora distinta fama; ed ora impiega l' opera sua come Astronomo, e come Fabbricator d' Istromenti, nel primario servigio del Re di Spagna. Il quadrante da lui vendutomi era di tal bontà, che aveva già guadagnato un premio dall' Accademia delle Scienze. Con diversi ingegnosi mezzi, dal medesimo Artista creati a mia contemplazione, ho potuto accertarmi dei più minuti errori delle divisioni, per diverse vie raffermati; nella quale scrupolosa indagine ho consumato più mesi. Il Cannocchial meridiano non pativa taccia: ed è apprezzato e adoprato attualmente nell' Osservatorio di Brera. Il pendolo uscì dalle mani di Robins, rinomato Oriolajo in Parigi. Avanzava nel verno $0''\frac{3}{4}$ al giorno, ritardava in estate $0''\frac{1}{4}$; passando per gradi lentissimi e regolari dall' una all' altra variazione; sicchè non ho voluto toccare le verghe di compensazione, per la troppa difficoltà d' imbroccare nelle dimensioni la giustezza matematica.

Tenevo anche un' esquisita macchina parallatica, fornita d' un cannocchiale acromatico di $3\,\frac{1}{2}$ piedi di foco, con 3 lenti objettive di $3\,\frac{1}{2}$ pollici di diametro: ma di questa non mi servivo che pegli eclissi, e per le osservazioni de' pianeti. Al presente li riferiti Istromenti insieme con tutti gli altri minori, cui possedevo, sono divisi fra le due Specole di Milano e di Bologna.

Avendo fermato nell' animo di creare il Catalogo con le mie sole osservazioni, senza prendere cosa alcuna da altri; unico piano che possa rendere tanta fatica paragonabile con profitto ad altri Cataloghi nati con la stessa totale indipendenza: elessi la Capra per conduttrice del celicolo gregge; e da 24 comparazioni al Sole, la più parte per via d' altezze corrispondenti, ho dedotto e trovato l'ascensione retta di lei perfettamente d'accordo con quella determinata da Maskelyne.

Per quel che riguarda le latitudini de' miei Osservatorj di Parigi e di Verona, e così ancora le refrazioni d' entrambi i luoghi, non mi sono stancato d' investigarle in diversi modi, e con moltitudine d' osservazioni. Ne ho reso conto accurato in una Memoria, stampata alla pag. 259 del Tom. V. di questa Società.

Le posizioni nel mio Catalogo essendo per l'anno 1800, le riduzioni dal 1783 e dal 1784 mi hanno prodotto a moltiplici prove una precessione annua, la cui differenza è insensibile da quella che è stata adottata da Delambre, Laplace, e Lalande, cioè 50″, 292 cos. obliq. — 0″, 2 per l'azion de' pianeti + 20″, 025 sen. a. r. tang. decl.

Ma le variazioni annue particolari, che espongo, sono corrette del moto proprio d' alcune stelle a tenor della Tavoletta che precede il Catalogo. Quivi il moto medesimo, ordinariamente è quello stabilito da Maskeline, o pur da Lalande, od anche talvolta da Mayer, o da Triesneker: li quali moti fan parte della Tavola, che suole andar dietro all' annuo Catalogo delle fisse nell' Efemeridi Milanesi. L'ho assunto solamente per quelle stelle, per cui lo trovai confermato dalle mie osservazioni. Da queste ho cavato quello in declinazione della Capra.

Quelle ascensioni rette, o declinazioni, che sono state osservate dall' Ab. Cesaris, o dal valoroso di lui Compagno l' Ab. Reggio, vanno contrassegnate da un asterisco, affinchè ne sia lode e merito a cui conviene. Per riguardo alle prime, le comparazioni furono da essi fatte a quelle stelle, che state lor sono da me indicate, e delle quali avevo più fida la posizione per le mie osservazioni. Le riduzioni e computazioni tutte sono state eseguite da me: il che siami avvenuto, to, non oso augurar senza errori, ma almeno con infrequenti e con tenui.

M' è parso bene manifestare il numero e le differenze estreme delle osservazioni, da cui è tratta la posizion d'ogni stella, affinchè gli astronomi, che volessero usar di questo Catalogo, abbiano un dato di sicurezza almen relativa. Del resto il numero totale delle osservazioni che ho fatte per questa terribile bisogna, non monta a meno di diecimila: poichè molte volte un' osservazione comprende or 18, ed or 24 altezze corrispondenti, e quasi sempre li transiti al meridiano furono presi a tre fili.

Mancano 15 ascensioni rette, e 7 declinazioni, per le quali non hanno ancora potuto compiersi le osservazioni. Non dubito conseguirle dallo zelo e favore del Chiar. Cesaris; e ne renderò publici li risultamenti nel Tomo XI di questa Società: donde avrà cui fosse in grado di che riempire a mano le lacune che restano nel seguente Catalogo.

Esso comprende 472 stelle; che diventano appunto 500, mediante 28 australi, di cui soggiungo la posizione; giacchè m' è riuscito comodo riguardarle, negl' intervalli fra le osservazioni delle boreali. Anche in quelle rimangon due posti vacui, che saranno parimente suppliti siccome ho detto per queste.

Penso poi fare cosa utilissima, comechè inusitata per quel ch' io sappia, ripetendo le medesime stelle del Catalogo, per ordine di declinazione in gradi e minuti, con l'ascensione retta corrispondente in ore e minuti, affinchè possano gli Astronomi rinvenire in un attimo, quali contenga il maggior Catalogo posizioni meglio confacenti al bisogno loro.

Ho computato eziandio, con l' ajuto indefesso di Ottavio mio Nipote, le tavole di aberrazione e di nutazione di tutte le stelle del mio Catalogo. Queste usciranno a luce, come spero, successivamente nelle annuali Efemeridi Milanesi: e saranno ordinate in maniera, a parer mio grandemente più comoda di quel che siasi ancor fatto. Cioè l' alfabeto delle lettere iniziali de' nomi delle costellazioni distribuirà la serie di queste: ed in ciascuna d' esse procederanno le stelle secondo i numeri di Flamsteed, non omessa la lettera greca o latina qualor ne siano contrassegnate.

Possano queste mie quadrilustri fatiche riuscire d' alcun giovamento a quella che tiene sì distinto luogo in fra le umane scienze.

TAVOLA

Del moto proprio applicato alla variazione annua d' alcune stelle ne' seguenti Cataloghi.

	In ascensione retta	In declinazione
δ di Perseo		+ 0″, 17
La Capra	+ 0″, 29	− 0, 50
Sirio	− 0, 48	+ 1, 37
Procione	− 0, 84	− 0, 94
Polluce	− 0, 75	
ι dell'Orsa maggiore	− 0, 73	
β della Vergine	+ 0, 72	
Spica	+ 0, 10	
Arturo	− 1, 28	− 1, 82
γ del Dragone	− 0, 45	
β dell' Aquario	+ 0, 29	
α dell' Aquario	− 0, 26	
Fomalhaut	+ 0, 15	+ 0, 18

CATALOGO

DI STELLE BOREALI

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
25 σ d'Andromeda	5	0	8	1	58	48	46, 44
27 ρ d'Andromeda	5	0	11	2	39	25*	46, 64
42 de' Pesci	6	0	12	3	1	15	46, 17
12 di Cassiope	6	0	13	3	27	49	48, 17
43 de' Pesci	7	0	14	3	34	30	46, 24
28 d' Andromeda	6	0	19	4	54	0	46, 88
14 λ di Cassiope	5	0	21	5	12	15	48, 39
15 κ di Cassiope	4	0	22	5	25	59*	49, 48
17 ζ di Cassiope	4	0	26	6	28	35	48, 92
29 π d' Andromeda	4.5	0	26	6	33	28	47, 40
18 α di Cassiope	3	0	29	7	18	37	49, 64
32 di Andromeda	6	0	31	7	34	53*	48, 03
21 di Cassiope	6	0	33	8	10	29	55, 82
24 η di Cassiope	4	0	37	9	15	53	50, 86
64 de' Pesci	6	0	39	9	37	12	46, 89
35 γ d'Andromeda, seg.	4	0	39	9	42	32	48, 78
43 di Cefeo in Evelio	5	0	44	10	57	50	91, 14
27 γ di Cassiope	3	0	45	11	11	12	52, 55
37 μ d'Andromeda	4.3	0	46	11	25	27*	48, 97
38 ν d'Andromeda	4.5	0	47	11	38	21*	47, 60
40 d' Andromeda	6	0	52	12	58	33*	48, 62
Polare	3	0	52	13	5	37	192, 89
26 della Balena	6	0	54	13	23	25*	45, 97
75 de Pesci	6	0	56				
42 φ d'Andromeda	5	0	58	14	29	17	51, 16
43 β d'Andromeda	2	0	59	14	38	34	49, 43
83 τ de' Pesci	5	1	1	15	10	11*	48, 85
84 χ de' Pesci	5	1	1	15	10	53*	47, 85
90 υ de' Pesci	5	1	9	17	7	34	48, 85
46 d' Andromeda	4.5	1	11	17	39	22	51, 90

Numero, e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
9	1, 3	35	40	35	+ 20, 01	4	3, 7
2	1, 5	36	51	36	20, 00	1	
2	1, 5	12	22	18*	19, 99	1	
6	6, 1	60	43	18	19, 99	14	5, 0
8	7, 5	13	12	27	19, 98	1	
2	3, 4	28	38	50	19, 95	1	
5	9, 0	53	24	49	19, 94	1	
2	0, 7	61	49	38*	19, 93	2	0, 6
5	6, 0	52	47	39	19, 89	9	5, 8
6	3, 7	32	36	58	19, 89	5	5, 3
2	9, 0	55	26	19*	19, 86	2	0, 4
8	6, 3	38	21	35	19, 84	1	
4	6, 0	73	53	31	19, 82	4	5, 5
4	6, 0	56	45	3	19, 76	11	6, 8
6	7, 5	15	51	37	19, 74	1	
2	1, 5	39	59	9*	19, 74	2	2, 5
3	49, 0	85	10	39	19, 66	8	9, 5
2	3, 0	59	37	52*	19, 65	2	1, 3
3	4, 6	37	24	42	19, 63	1	
1		22	20	11	19, 62	1	
6	6, 9	30	43	34*	19, 51	2	1, 4
17	168, 8	88	14	23	19, 50	19	18, 8
2	1, 5	0	17	42	19, 48	1	
		11	52	55	19, 43	1	
2	1, 5	46	10	19	19, 39	6	4, 5
6	6, 4	34	33	25	19, 37	4	2, 5
2	3, 0	29	1	26	19, 32	1	
1		19	58	0	19, 32	1	
6	6, 7	26	12	25*	19, 13	2	3, 5
5	10, 4	44	28	34	19, 08	8	7, 6

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
36 ψ di Cassiope	5	1	12	18	0	1	60,58
38 di Cassiope	6	1	17	19	8	26	63,25
49 d' Andromeda	5.6	1	18	19	32	40	52,87
40 *h* di Cassiope	6	1	23	20	42	12	67,75
101 de' Pesci	6.7	1	25	21	16	28	47,70
50 υ d' Andromeda	6.5	1	25	21	16	32*	52,13
51 d' Andromeda	5.4	1	26	21	26	52	53,97
52 χ d' Andromeda	6	1	28	21	52	36	52,99
42 *g* di Cassiope	6	1	28	21	54	54	66,06
104 de' Pesci	6.7	1	29	22	8	20	47,72
53 τ d' Andromeda	5	1	29	22	12	18*	52,19
54 d' Andromeda	4	1	31	22	48	4	55,09
46 *d* di Cassiope	6	1	41	25	10	13	66,70
5 γ d' Ariete, mezzo	4	1	43	25	38	38	48,81
d' Andromeda	6	1	43	25	47	51	52,30
6 β dell' Ariete	3	1	44	25	54	13	49,10
47 di Cassiope	5	1	46	26	24	16*	82,72
48 *e* di Cassiope	5	1	46	26	26	48*	70,36
50 *f* di Cassiope	4.5	1	47	26	39	42*	72,72
49 di Cassiope	6	1	47	26	42	50	79,89
52 di Cassiope	7	1	48	27	2	9*	64,55
53 di Cassiope	7	1	48	27	4	57*	64,16
57 γ d' Andromeda	2	1	52	27	55	14	54,17
54 di Cassiope	6.7	1	52	28	2	14	72,66
59 d'Androm. la prec.	6	1	59	29	42	0	53,73
55 di Cassiope	6.7	1	59	29	44	44	67,83
8 δ del Triangolo	5	2	5	31	12	58	52,76
62 *c* d' Andromeda	6	2	6	31	36	41	56,98
9 *i* di Perseo	6	2	9	32	7	43	61,10
66 d' Andromeda	6.7	2	15	33	37	54	59,00

Numero, e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
2	2, 2	67	4	52	+ 19, 04	5	12, 5
2	3, 0	69	13	43*	18, 91	1	
11	6, 0	45	58	14	18, 86	7	3, 9
2	21, 0	72	0	51	18, 74	2	0, 2
9	6, 7	13	38	5*	18, 65	2	3, 7
2	3, 0	40	23	52*	18, 65	1	
3	6, 0	47	36	35	18, 64	4	10, 0
2	4, 5	43	21	46	18, 57	4	7, 2
1		69	36	17*	18, 57	1	
7	7, 5	13	15	56	18, 54	3	1, 0
2	4, 5	39	33	24*	18, 53	1	
11	6, 0	49	40	36	18, 46	3	2, 9
9	15, 2	67	41	39	18, 12	4	7, 1
4	4, 5	18	18	31*	18, 04	3	4, 0
5	3, 7	36	8	28	18, 02	2	9, 7
3	7, 5	19	49	21	18, 00	4	4, 2
3	4, 5	76	18	23*	17, 93	1	
2	3, 0	69	55	38*	17, 92	1	
2	6, 0	71	26	29*	17, 89	1	
2	9, 0	75	8	32	17, 88	10	4, 8
5	13, 6	63	53	46*	17, 83	2	0, 9
2	3, 0	63	25	13*	17, 83	2	1, 1
17	7, 9	41	21	46	17, 69	1	
2	6, 0	70	36	16	17, 67	14	7, 6
9	4, 5	38	5	13*	17, 39	1	
6	5, 2	65	34	42	17, 38	7	3, 8
4	3, 0	33	18	6	17, 12	3	3, 9
9	7, 5	46	26	57	17, 05	7	13, 8
3	6, 0	54	55	19	16, 96	1	
8	8, 2	49	40	1	16, 67	3	5, 4

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
29 dell' Ariete	6.7	2	22	35	29	30	48, 87
31 dell' Ariete	5.6	2	26	36	26	4	48, 38
13 θ di Perseo	4	2	31	37	39	21*	59, 70
38 dell' Ariete	7	2	34	38	31	7	48, 50
16 ρ 1 di Perseo	4.5	2	38	39	30	0	55, 71
18 τ di Perseo	5.4	2	40	40	2	30*	62, 39
Del Cervo Lappone	7	2	42	40	28	40	91, 57
Del Cervo Lappone	6	2	43	40	42	54	92, 56
21 di Perseo	4.5	2	45	41	17	46	53, 92
22 π di Perseo	4	2	46	41	30	20	56, 63
49 dell' Ariete	6	2	50	42	32	9	52, 45
23 γ di Perseo	3	2	50	42	36	5*	63, 74
93 della Balena	6	2	52	42	58	38	46, 79
27 κ di Perseo	4	2	56	44	0	53	59. 42
1 della Giraffa in Ev.	5.4	3	3	45	38	49	76, 50
58 ζ dell' Ariete	5	3	3	45	51	22	51, 26
32 *l* di Perseo	6	3	8	47	1	32	59. 41
33 α di Perseo	2	3	10	47	31	42	63, 01
2 ξ del Toro	4.5	3	16	49	5	5	48, 35
5 *f* del Toro	5	3	20	49	57	39	49, 27
37 ψ di Perseo	5	3	22	50	35	6	62, 83
39 δ di Perseo	3	3	29	52	11	10	62. 98
5 della Giraffa in Ev.	5	3	30	52	22	35	91, 23
41 ν di Perseo	4	3	32	52	54	50	60, 29
30 *e* del Toro	5	3	37	54	19	39	48, 96
46 ξ di Perseo	5	3	46	56	30	18	57, 72
38 ν del Toro	4	3	53	58	7	52	47, 56
11 della Giraffa in Ev.	6.5	3	59	59	50	50*	77, 61
51 μ di Perseo	4.5	4	0	60	3	57	65, 13
54 γ del Toro	3	4	8	62	6	20	50, 73

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
6	6, 0	14	8	22	+ 16, 30	1	
7	7, 5	11	34	17	16, 10	4	3, 4
4	16, 7	48	22	21	15, 85	5	0, 9
6	8, 2	11	35	44	15, 67	3	1, 6
9	5, 4	37	29	10	15, 45	1	
4	8, 5	51	56	10	15, 33	2	3, 2
2	9, 6	74	5	54	15, 23	2	9, 6
2	1, 5	74	20	31	15, 18	9	5, 3
8	6, 2	31	7	15	15, 04	1	
3	5, 2	33	51	1*	15, 00	3	1, 1
6	7, 5	25	39	34	14, 75	1	
3	0, 5	52	42	51	14, 74	4	9, 9
5	5, 6	3	33	18*	14, 64	3	3, 4
7	4, 5	44	5	20	14, 40	3	4, 3
2	2, 5	64	54	19	14, 00	12	5, 7
6	7, 5	20	17	42	13, 95	1	
1		42	35	36	13, 64	9	12, 2
9	6, 7	49	8	16	13, 51	11	6, 5
9	7, 5	9	1	22	13, 11	1	
8	4, 5	12	14	28	12, 88	4	3, 2
3	6, 0	47	30	51	12, 71	15	12, 4
14	6, 7	47	8	9	12, 45	11	5, 0
2	6, 8	70	41	53	12, 19	4	5, 8
2	3, 0	41	55	55*	12, 07	3	1, 2
4	1, 5	10	30	56	11, 67	1	
8	6, 0	35	12	5	11, 04	1	
9	3, 7	5	25	18	10, 57	1	
3	7, 9	61	19	42	10, 06	1	
3	5, 2	47	53	11	9, 99	2	6, 8
3	3, 0	15	7	55*	9, 35	3	0, 3

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	Sec.
44 dell' Eridano	5	4	18	64	33	2	46, 24
2 della Giraffa	5.6	4	24	66	2	40*	70, 28
49 dell' Eridano	5	4	27	66	43	51	46, 12
1 d' Orione	4	4	39	69	44	46	48, 12
6 *g* d'Orione	6	4	43	70	55	20*	49, 65
8 *z* d' Orione	4	4	44	70	57	34	46, 64
10 della Giraffa, doppia	4	4	46	71	25	26*	78, 99
7 ε dell' Auriga	4	4	48	71	54	37*	64, 01
10 d' Orione	4	4	48	72	2	51*	46, 41
8 ζ dell' Auriga	4	4	49	72	7	54	62, 37
9 dell' Auriga	5	4	51	72	45	49*	69, 83
10 η dell' Auriga	4	4	53	73	7	39	62, 56
14 della Giraffa	5	4	55	73	44	43*	82, 73
LA CAPRA	1	5	2	75	29	3	66, 15
15 della Giraffa	6	5	2	75	33	56	76, 83
16 della Giraffa	6	5	6	76	35	45*	76, 32
23 *m* d'Orione doppia	6	5	12	78	4	52	47. 08
Seguente				78	5	5*	
24 φ dell' Auriga	5	5	14	78	36	1	59, 33
21 della Giraffa	6.7	5	22	80	29	44*	82, 77
39 λ d' Orione	4	5	24	81	1	53	49, 35
47 ω d' Orione	5	5	28	82	9	22*	47, 33
26 della Giraffa	5.	5	30	82	24	57	75, 39
28' della Giraffa	6.7	5	30	82	28	13*	76, 29
29 della Giraffa	5.6	5	34	83	22	57*	76, 37
132 del Toro	4	5	37	84	11	11	55, 01
58 α d' Orione	1	5	44	86	5	7	48, 52
38 dell' Auriga	6	5	49	87	13	22*	64, 58
61 μ d' Orione	4	5	51	87	50	38	49, 34
1 *H* de' Gemelli	5	5	52	87	59	26*	54, 55

Numero ; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero ; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
7	4, 5	0	55	37*	+ 8, 59	3	2, 6
3	12, 1	53	3	48	8, 13	1	
3	2, 2	0	34	58*	7, 91	3	1, 0
3	6, 7	6	36	0*	6, 93	3	3, 0
3	4, 1	11	5	11*	6, 55	3	4, 0
3	1, 5	2	6	7*	6, 53	3	3, 0
2	7, 0	60	7	49	6, 39	7	7, 5
4	16, 9	43	30	41	6, 22	4	0, 9
2	2, 9	1	23	45*	6, 17	2	1, 0
3	5, 2	40	46	3*	6, 15	3	2, 0
5	9, 6	51	18	34*	5, 94	3	5, 2
3	5, 2	40	56	47	5, 81	1	
7	14, 9	62	25	38*	5, 60	2	5, 0
∞		45	46	42	4, 50	9	7, 8
3	10, 4	57	52	56*	4, 99	3	6, 0
5	13, 2	57	19	58*	4, 64	3	5, 9
3	4, 5	3	20	23*	4, 13	3	1, 0
		3	20	53*			
4	4, 3	34	17	34	3, 96	1	
3	8, 8	61	48	33	3, 30	1	
3	3, 0	9	47	19	3, 12	3	7, 2
4	1, 4	3	59	45	2, 77	3	2, 8
2	15, 0	56	0	55*	2, 65	3	5, 0
4	0, 0	56	49	10	2, 63	1	
4	13, 3	56	50	0	2, 31	1	
2	1, 5	24	29	6*	2, 02	3	1, 4
3	9, 0	7	21	25*	1, 37	3	2, 0
3	1, 8	42	58	49	0, 97	2	14, 8
5	3, 7	9	38	11	0, 75	1	
3	1, 6	23	15	45	0, 70	3	3, 9

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	Sec.
70 ξ d' Orione	4	6	1	90	8	28	51,03
2 del Lince	4	6	2	90	29	37*	79,35
51 di Cefeo in Evelio	4	6	3	90	38	10	466,93
7 η de' Gemelli	2.3	6	3	90	41	56	54,25
73 *k* 1 d' Orione	6	6	5	91	7	33	50,42
74 *k* 2 d' Orione	6	6	5	91	18	2	50,31
46 dell' Auriga	5	6	9	92	21	45	69,25
23 della Giraffa in Ev.	6	6	10	92	57	53*	156,52
13 μ de' Gemelli	3	6	11	92	42	45	54,27
8 del Liocorno	4	6	13	93	17	27	47,58
52 dell' Auriga	5.6	6	25	96	13	9	62,68
55 dell' Auriga	5	6	29	97	7	47	65,62
42 della Giraffa	4.5	6	30	97	30	16	94,50
24 della Giraffa in Ev.	5	6	31	97	40	20*	133,28
58 dell' Auriga	4	6	37	99	9	5*	63,74
60 dell' Auriga	6.7	6	39	99	52	22*	61,74
16 del Lince	6.5	6	43	100	44	54	65,84
25 della Giraffa in Ev.	6	6	45	101	21	49	199,94
41 de' Gemelli	6	6	49	102	11	21	51,68
63 dell' Auriga	4	6	58	104	28	10	62,00
21 del Liocorno	5.6	7	1	105	17	24	45,95
64 dell' Auriga	5.6	7	4	106	1	35*	62,80
20 del Lince, doppia	6	7	7	106	43	38	69,20
66 dell' Auriga	5.6	7	10	107	33	55	62,56
CASTORE	1.2	7	22	110	27	12	57,81
70 de' Gemelli	5	7	25	111	20	53*	59,23
49 della Giraffa	5	7	28	112	3	28	82,84
PROCIONE	1.2	7	29	112	12	18	46,96
POLLUCE	2	7	33	113	15	47	55,18
83 φ de' Gemelli	5	7	41	115	18	30	55,27

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
3	4,5	14	14	29	+ 0,05	2	0,4
1		59	3	40	0,17	1	
1		87	16	43	— 0,22	1	
3	6,0	22	32	59	0,24	4	4,2
2	3,7	12	36	0	0,40	1	
1		12	18	40	0,45	1	
3	5,2	49	22	22*	0,83	3	3,0
4	31,0	79	44	33	1,04	1	
2	1,5	22	36	11	0,95	4	1,6
2	3,7	4	40	58*	1,15	3	1,9
3	3,7	40	3	38	2,17	1	
1		44	41	54	2,49	2	13,9
3	3,0	67	46	22*	2,62	2	0,0
2	17,2	77	11	46*	2,68	2	0,0
4	5,0	42	0	6	3,18	1	
4	3,2	38	40	31	3,43	1	
6	15,1	45	20	9	3,73	2	17,6
1		82	44	51*	3,96	2	0,0
2	1,5	16	20	31*	4,23	2	0,0
2	2,2	39	37	35	5,06	1	
3	9,7	0	0	53	5,28	1	
4	3,9	41	13	26	5,53	2	2,0
3	7,5	50	30	37	5,77	1	
2	1,5	41	2	35	6,05	2	0,7
5	3,0	32	18	43*	7,00	2	0,0
1		35	28	50	7,29	1	
3	4,7	63	17	52*	7,52	2	0,0
9	12,0	5	43	39	8,50	1	
4	4,5	28	29	50*	7,91	2	0,0
1		27	16	19*	8,56	2	0,0

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	Sec.
6 χ del Cancro	5	7	51	117	48	7	55, 50
27 del Lince	5	7	53	118	20	7	68, 55
14 ψ 2 del Cancro	4	7	58	119	35	47	54, 47
56 della Giraffa	6	7	59	119	43	0	77, 27
17 β del Cancro	3.4	8	6	121	24	50	48, 89
25 *d* 2 del Cancro	6	8	14	123	37	24	51, 26
33 η del Cancro	6.7	8	21	125	16	50	52, 25
4 π 2 Orsa maggiore	6.5	8	23	125	38	45*	80, 84
34 del Lince	6	8	27	126	46	59	62, 85
47 δ del Cancro	4	8	33	128	19	31*	51, 31
11 ε dell'Idra	4	8	36	129	2	36	47, 89
5 dell' Orsa maggiore	5.6	8	37	129	10	55*	76, 01
57 ι 2 del Cancro	5.6	8	42	130	30	3	55, 21
8 ρ dell'Orsa maggiore	5	8	44	131	4	10	84, 03
9 ι dell'Orsa maggiore	3	8	45	131	21	36	62, 39
12 κ dell'Orsa maggiore	3	8	50	132	28	34	62, 30
11 σ 1 idem	5.6	8	51	132	39	5*	81, 79
76 κ del Cancro	5	8	57	134	13	25	48, 85
16 *c* dell'Orsa maggiore	5	8	58	134	35	37	73, 02
38 del Lince	4	9	6	136	35	13	56, 55
1 del Dragone in Ev.	5.4	9	7	136	49	13*	145, 72
23 *h* dell'Orsa maggiore	4	9	15	138	53	51	72, 83
24 *d* dell'Orsa maggiore	4	9	17	139	7	38*	83, 35
8 del Lioncello	5	9	19	139	49	52	55, 32
27 dell' Orsa maggiore	6.5	9	24	141	5	53	87, 50
1 del Sestante	5	9	27	141	39	29	47, 63
2 del Sestante	5	9	28	142	0	21	47, 14
44 del Lince	5.6	9	32	143	3	50*	65, 22
14 del Lioncello	6.7	9	34	143	27	34	58, 31
15 del Lioncello	6.5	9	36	143	54	15*	58, 54

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	Sec.	G.	M.	S.	Sec.	N.	Sec.
3	6, 0	28	20	37*	— 9, 34	2	0, 0
3	3, 0	52	4	9	9, 50	1	
3	9, 0	26	6	10*	9, 89	2	1, 0
2	1, 5	60	58	3	9, 93	1	
3	1, 5	9	47	35*	10, 43	2	1, 0
5	9, 0	17	41	44	11, 09	2	4, 4
3	6, 0	21	6	35	11, 56	2	1, 6
1		65	0	35	11, 67	1	
5	6, 7	46	31	23	11, 99	1	
2	1, 5	18	52	40	12, 42	4	7, 4
2	1, 5	7	8	36	12, 61	2	7, 8
1		62	41	43	12, 65	1	
5	6, 0	31	19	55	13, 00	1	
2	7, 5	68	23	54*	13, 15	2	0, 0
5	4, 5	48	49	0	13, 23	2	2, 2
4	9, 0	47	56	18	13, 51	3	6, 6
2	2, 8	67	39	45	13, 56	2	16, 5
2	0, 0	11	28	1*	13, 96	2	3, 0
2	5, 2	62	14	2	14, 06	1	
3	3, 0	37	38	24	14, 54	2	14, 6
2	11, 5	82	11	11	14, 60	1	
3	9, 0	63	55	13	15, 09	1	
3	7, 7	70	41	49	15, 14	1	
2	3, 0	35	58	43	15, 30	2	3, 4
3	9, 0	73	8	59	15, 58	1	
3	1, 5	7	43	32	15, 70	2	12, 9
3	5, 4	5	32	54	15, 78	1	
1		58	2	13	16, 00	1	
5	3, 0	46	2	13	16, 09	1	
1		46	56	51	16, 20	1	

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
29 υ dell'Orsa maggiore	4	9	37	144	9	34	66, 22
24 μ del Lione	3	9	41	145	20	18*	51, 73
31 dell'Orsa maggiore	5	9	43	145	38	39	59, 77
29 della Giraffa in Ev.	6.5	9	58	149	31	20	168, 12
32 dell' Orsa maggiore	5	10	3	150	49	40*	67, 96
22 del Lioncello	6.7	10	4	150	53	50	52, 14
33 λ dell'Orsa maggiore	3	10	5	151	14	50	55, 21
24 del Lioncello	6.5	10	5	151	16	28	51, 43
30 della Giraffa in Ev.	6.5	10	5	151	18	50	131, 17
Dell' Orsa maggiore	5	10	10	152	22	29*	67, 36
25 del Lioncello	6	10	10				
34 μ dell'Orsa maggiore	3.2	10	10				
23 del Sestante	5	10	11	152	40	21	46, 47
29 del Lioncello	6	10	14	153	32	54*	52, 52
30 del Lioncello	5.6	10	14	153	36	32*	52, 13
31 del Lioncello	5	10	16	154	4	1	52, 72
33 del Lioncello	4.5	10	20	155	6	48	51, 50
37 del Lioncello	5	10	27	156	51	18	51, 06
38 del Lioncello	6	10	28	156	54	57*	52, 27
38 dell' Orsa maggiore	5	10	28	157	1	32*	64, 13
Della Giraffa	6	10	34	158	31	47	360, 75
42 del Lioncello	4.5	10	35	158	40	38	50, 44
51 *m* del Lione	6	10	36	158	54	5	48, 56
42 dell' Orsa maggiore	5	10	39	159	40	30	58, 17
46 del Lioncello	4.5	10	42	160	31	10	50, 67
45 ω dell'Orsa maggiore	5.6	10	42	160	36	6	52, 42
57 Del Lione	6.7	10	46	161	28	33	46, 11
50 α dell' Orsa maggiore	2	10	51	162	48	56	57, 47
52 del Lioncello	6.7	10	56	164	4	37	48, 69
52 ψ dell' Orsa maggior	3	10	58	164	35	21	51, 37

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	Sec.	G.	M.	S.	Sec.	N.	Sec.
1		59	58	1	— 16, 23	1	
1		26	56	33	16, 47	1	
3	5, 2	50	45	23	16, 53	4	12, 5
2	9, 0	85	15	2	17, 25	2	5, 9
2	3, 9	66	5	49	17, 48	1	
3	5, 7	32	27	36	17, 49	1	
2	4, 2	43	54	28	17, 55	1	
2	1, 5	29	40	53	17, 55	1	
3	22, 5	83	33	45	17, 57	1	
2	6, 8	66	34	3	17, 74	1	
		42	50	55	17, 77	1	
		42	30	2	17, 78	5	5, 9
3	4, 5	3	17	40	17, 79	1	
2	5, 4	36	26	23	17, 93	1	
1		34	48	38	17, 93	2	10, 8
3	3, 0	37	43	53	18, 00	1	
3	7, 5	33	23	58	18, 16	1	
3	1, 5	33	0	50	18, 41	3	7, 8
2	3, 6	38	57	1	18, 43	2	1, 0
2	2, 9	66	45	23	18, 43	3	7, 5
1		88	40	11*	18, 63	2	0, 0
7	3, 6	31	44	7	18, 65	4	10, 5
2	3, 0	19	56	36	18, 68	1	
4	7, 5	60	22	46	18, 77	8	15, 0
3	3, 0	35	17	28	18, 87	3	14, 5
9	4, 0	44	15	11	18, 88	1	
2	1, 5	1	29	57	18, 98	2	7, 4
5	15, 0	62	49	39	19, 13	2	3, 2
4	5, 0	26	37	12	19, 26	2	2, 3
17	4, 0	45	34	54	19, 30	8	3, 1

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
54 ν dell' Orsa maggior	4	11	8	166	54	37*	49, 02
Della Giraffa	6	11	17	169	18	18	73, 14
1 λ del Dragone	4	11	19	169	50	33	55, 88
86 del Lione	6	11	20	170	0	31	47, 17
59 dell' Orsa maggiore	6	11	28	171	54	31	48, 73
60 dell' Orsa maggiore	6	11	28	171	56	25	49, 06
5 *β* della Vergine	3	11	40	173	4	4	46, 75
64 *γ* dell' Orsa maggiore	2	11	43	175	48	36	48, 01
7 *b* della Vergine	6	11	50	177	25	28*	46, 69
1 Chioma di Berenice	7	11	51	177	52	16	46, 26
Della Giraffa	6	11	54	178	32	17	54, 83
Della Giraffa	6.7	12	2	180	34	7	44, 96
1 de' Levrieri	6	12	5	181	11	20	45, 36
2 de' Levrieri	5	12	6	181	30	56	45, 47
De' Levrieri	6	12	8	181	53	36	45, 02
7 *h* della Chioma di Ber.	5	12	6	181	33	7*	45, 69
16 *c* della Vergine	5	12	10	182	32	50	45, 87
Della Giraffa	6	12	11	182	44	12*	23, 63
4 de' Levrieri	6	12	14	183	28	54	44, 79
Dell' Orsa minore	6	12	14	183	32		— 16, 14
6 de' Levrieri	5	12	16	183	59	28	+ 44, 76
15 *c* della Chioma	4	12	17	184	14	16*	45, 11
18 della Chioma	6	12	19	184	51	24	45, 14
74 dell' Orsa maggiore	5	12	21	185	8	28	42, 90
21 *g* della Chioma	5	12	21	185	15	5*	45, 06
26 della Chioma	5	12	29	187	17	21	44, 91
76 dell' Orsa maggiore	6	12	33	188	11	30	40, 13
10 de' Levrieri	5	12	36	188	52	38	43, 31
7 del Dragone	6.5	12	39	189	49	56	37, 53
11 de' Levrieri	6	12	39	189	51	49	41, 91

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
3	6, 0	34	11	13	— 19, 50	4	0, 7
5	24, 7	82	13	28*	19, 68	2	0, 0
4	12, 0	70	25	56	19, 71	3	6, 7
3	7, 2	19	30	41	19, 72	3	3, 6
3	3, 8	44	44	0	19, 82	4	1, 3
6	5, 1	47	56	35	19, 83	2	13, 2
11	7, 0	2	53	32*	19, 94	2	0, 0
3	7, 5	54	48	22	19, 96	2	14, 2
3	7, 5	4	46	6	20, 00	1	
3	4, 4	23	12	46	20, 01	2	0, 9
2	30, 0	86	41	43	20, 02	5	12, 2
3	21, 1	78	33	0	20, 02	1	
3	3, 7	54	33	10	20, 02	1	
4	3, 2	41	46	38	20, 01	2	16, 7
1		54	18	41	20, 01	1	
3	3, 2	25	3	26	20, 01	1	
4	5, 5	4	25	33	19, 99	2	1, 2
1		87	32	52	19, 98	2	0, 3
2	4, 8	43	39	10	19, 98	2	6, 0
1		88	48	27	19, 98	3	12, 2
3	4, 5	40	7	46*	19, 97	2	0, 0
2	2, 6	29	24	30	19, 96	1	
3	4, 4	25	12	55	19, 94	1	
3	3, 4	59	30	17	19, 94	3	13, 5
3	8, 5	25	40	32	19, 93	1	
3	5, 4	22	9	51	19, 86	2	1, 7
1		63	48	38	19, 82	3	10, 8
3	4, 5	40	22	5	19. 79	1	
3	12, 0	67	52	48	19, 73	1	
3	3, 4	49	33	41	19, 73	1	

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
35 della Chioma	4	12	43	190	51	34	44, 39
43 δ della Vergine	3	12	46	191	22	54	45, 63
8 del Dragone	6	12	47	191	51	44	36, 46
32 della Giraffa in Ev.	5	12	48	191	56	37*	2, 95
La seguente	5	12	48	191	58	41*	2, 95
9 del Dragone	6.5	12	52	193	4	35	34, 91
14 de' Levrieri	5	12	56	194	5	31	42, 28
43 della Chioma	5	13	3	195	38	3	42, 96
60 σ della Vergine	5	13	8	196	52	33	45, 28
21 de' Levrieri	5	13	10	197	25	32	38, 60
14 de' Levrieri in Evelio	5	13	10	197	27	53	41, 55
64 della Vergine	6	13	12	198	1	10	45, 27
79 ζ dell' Orsa maggiore	2	13	16	198	57	49	36, 31
70 della Vergine	5	13	19	199	39	39	44, 15
Dell' Orsa maggiore	5	13	21	200	16	19	33, 44
24 de' Levrieri	5	13	26	201	33	56	37, 15
81 dell' Orsa maggiore	6	13	26	201	36	1	34, 85
1 di Boote	6	13	31	202	46	46	42, 99
82 dell' Orsa maggiore	6	13	32	202	56	5	35, 23
84 dell' Orsa maggiore	6	13	39	204	46	50	33, 76
85 η dell' Orsa maggiore	2	13	40	204	54	39	35, 83
5 di Boote	4	13	40	204	57	24	43, 39
12 *d* di Boote	5	14	1	210	19	13	41, 00
3 dell' Orsa minore	6	14	5	211	21	35	5, 48
ARTURO	1	14	7	211	38	1	40, 79
19 λ di Boote	4	14	9	212	11	35	34, 49
21 ι di Boote	1	14	9	212	16	9*	32, 11
4 *b* dell' Orsa minore	5	14	10	212	27	29	— 6, 80
25 ρ di Boote	4	14	23	215	48	3	+38, 83
26 di Boote	6	14	23	215	51	41	40, 93

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
3	4, 0	22	20	2	— 19, 67	1	
4	7, 9	4	29	8	19. 63	2	0, 8
3	12, 0	66	31	22	19, 60	1	
2	6, 6	84	30	15	19, 59	2	12, 3
2	0, 9	84	29	53	19, 59	2	13, 1
2	4, 5	67	40	34	19, 50	3	7, 7
3	5, 7	36	52	19	19, 42	2	10, 5
2	5, 3	28	53	22	19, 28	1	
1		6	31	44	19, 16	1	
3	3, 6	50	44	16	19, 10	5	16, 9
1		36	10	3*	19, 10	1	
3	4, 8	6	12	29	19, 04	1	
3	4, 3	55	58	29	18, 93	1	
3	5, 4	14	51	29	18, 85	2	3, 7
2	9, 6	60	58	48	18, 78	2	3, 9
3	3, 7	50	2	40	18, 61	3	3, 0
1		56	22	25	18, 61	1	
4	3, 9	20	58	24	18, 46	1	
3	6, 7	53	56	15	18, 44	3	10, 3
3	2, 8	55	26	4	18, 17	2	12, 4
2	0, 0	50	19	1	18, 16	23	13, 9
2	3, 8	16	47	42	18, 15	1	
3	2, 0	26	2	44	17, 28	2	0, 1
2	7, 5	75	32	34	17, 09	9	12, 7
4	4, 6	20	13	50	18, 87	2	4, 8
3	3, 6	47	0	45	16, 94	16	8, 3
1		52	17	43	16, 93	1	
1		78	29	15	16, 89	7	6, 0
1		31	15	21	16, 24	2	1, 9
2	1, 5	23	8	58	16, 23	1	

Nomi delle stelle e delle costellazioni .	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo .		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800 .			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
28 σ di Boote	4	14	26	216	29	36*	+38, 90
5 *a* dell' Orsa minore	4	14	28	217	2	13	− 4, 61
29 π di Boote	3	14	31	217	49	49	+42, 12
35 *o* di Boote	4	14	36	218	58	38	41, 89
Dell' Orsa minore	7	14	41	220	9	43	3, 19
37 ξ di Boote	4.5	14	42	220	32	20	41, 22
6 dell' Orsa minore	7	14	45				
7 β dell' Orsa minore	3	14	51	222	52	10	− 4, 77
42 β di Boote	3	14	54	223	36	11*	+33, 86
44 di Boote	5	14	57	224	18	13	30, 17
47 di Boote	6	14	59	224	41	56	29, 79
10 dell' Orsa minore	7	15	6	226	35	2*	− 7, 01
50 di Boote	5	15	16	228	26	49*	+35, 96
51 μ di Boote	4	15	17	229	14	13	34, 06
11 dell' Orsa minore	5	15	17	229	20	36*	− 2, 37
Seguente	5	15	17				
3 β della Corona	4	15	19	229	53	37*	+37, 17
12 ι del Dragone	3	15	21	230	7	36	19, 68
52 ν di Boote	6	15	24	230	56	9	32, 17
7 ζ della Corona	4	15	32	232	57	43*	33, 77
20 χ del Serpente	6	15	32	233	5	41	42, 11
27 λ del Serpente	5	15	37	234	11	10*	43, 67
15 θ dell' Orsa minore	5	15	38	234	25	2*	−30, 76
35 κ del Serpente	4	15	40	234	56	5	+40, 37
10 δ della Corona	4	15	41	235	18	6*	37, 67
11 κ della Corona	6	15	44	235	55	32*	33, 77
2 di Ercole	6	15	48	236	58	23*	29, 88
12 λ della Corona	5	15	49	237	7	43*	32, 55
16 ζ dell' Orsa minore	4	15	52	237	53	30*	−36, 85
5 *r* di Ercole	5	15	52	238	3	49*	+40, 29

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
2	4, 0	30	37	28	— 16, 10	1	
4	5, 5	76	35	11	15, 98	14	9, 7
2	3, 0	17	17	4	15, 81	2	0, 6
1		17	49	12	15, 56	2	1, 8
1							
3	3, 0	19	56	24	15, 22	4	6, 0
		72	47	57	15, 06	4	14, 6
1		74	58	25	14, 67	14	9, 3
1		41	11	15	14, 50	1	
3	2, 0	48	26	20	14, 33	5	17, 8
1		48	55	33	14, 23	1	
1		74	39	36	13, 75	3	22, 4
4	4, 5	33	39	33	13, 26	2	34, 0
3	3, 0	38	5	14	13, 07	1	
4	10, 6	72	33	3	13, 04	4	28, 7
		72	32	47	13, 04	4	32, 6
4	4, 6	29	48	12	12, 90	2	4, 4
5	2, 0	59	40	13	12, 84	7	13, 5
2	6, 0	41	31	19	12, 62	2	6, 2
6	11, 0	37	17	43	12, 06	1	
3	3, 0						
4	4, 5	7	59	25	11, 71	1	
3	10, 2	78	0	35	11, 65	17	8, 1
3	3, 0	18	46	4*	11, 50	3	2, 4
2	2, 6	26	41	26	11, 39	2	0, 1
2	5, 9	36	17	23	11, 21	1	
2	4, 5	43	43	39	10, 91	8	7, 8
3	12, 1	38	31	55	10, 86	1	
2	6, 1	78	24	9	10, 59	23	11, 0
1		18	22	52	10, 58	1	

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
6 υ di Ercole	5	15	57	239	8	41*	27, 76
11 φ di Ercole	4	16	2	240	37	5*	28, 21
49 del Serpente	6	16	4	240	59	46*	41, 55
17 σ della Corona	6	16	7	241	47	51*	33, 88
Dell' Orsa minore	6	16	10	242	36	1*	− 33, 04
50 σ del Serpente	5	16	12	242	59	13*	+ 45, 48
10 λ d' Ofioco	3	16	21	245	12	28*	45, 17
14 η del Dragone	3	16	21	245	19	33*	11, 78
30 *g* di Ercole	5	16	22	245	31	8*	29, 35
35 σ di Ercole	4	16	28	246	54	57*	28, 85
15 *A* del Dragone	5	16	28	247	6	44*	− 2, 61
17 del Dragone seguente	5	16	32	247	52	48*	+ 21, 03
43 *i* di Ercole	5	16	36	249	3	29*	42, 98
45 *l* di Ercole	5	16	38	249	29	0*	44, 10
18 g del Dragone	5	16	40	249	53	42*	5, 68
47 *k* di Ercole	5	16	41	250	9	13*	43, 43
49 di Ercole	5	16	43	250	44	37*	40, 76
25 ι di Ofioco	4	16	45	251	8	11*	42, 43
27 ϰ di Ofioco	4	16	48	252	3	2*	42, 69
19 *h* del Dragone	5	16	55	253	44	35*	3, 90
61 *c* di Ercole	6	16	56	254	5	0*	32, 11
22 ε dell' Orsa minore	4	17	7	256	44	30*	− 98, 83
67 π di Ercole	3	17	8	257	1	14*	+ 31, 21
22 ζ del Dragone	2	17	8	257	3	30	2, 18
66 d' Ercole	6	17	9	257	18	23*	42, 11
70 di Ercole	4	17	13	258	10	1	36, 92
76 λ di Ercole	4.5	17	23	260	40	11	36, 19
27 *f* del Dragone	5.4	17	33	263	11	36	− 3, 94
85 ι di Ercole	4	17	34	263	27	21	+ 25, 26
Di Ercole	5	17	35	263	43	8	34, 67

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
2	2, 9	46	35	55	— 10, 26	17	10, 8
6	7, 7	45	27	57	9, 82	9	8, 6
6	6, 0	14	4	31	9, 71	1	
6	9, 9	34	22	32	9, 45	1	
5	15, 2	77	19	15	9, 24	14	9, 7
4	5, 6	1	30	36	9, 09	1	
5	5, 9	2	26	8	8, 40	1	
2	1, 8	61	58	14	8, 36	19	10, 5
2	0, 4	42	19	51	8, 28	1	
6	10, 2	42	51	24	7, 85	9	14, 7
2	0, 7	69	12	5	7, 78	2	0, 8
5	7, 8	53	19	53	7, 54	4	5, 8
6	4, 0	8	57	38	7, 16	2	3, 4
6	6, 4	5	37	13	7, 01	1	
6	7, 1	64	58	12	6, 83	3	4, 5
6	10, 0	7	36	16	6, 80	1	
6	10, 7	15	19	25	6, 59	1	
6	5, 8	10	30	27	6, 48	2	3, 7
4	5, 3	9	42	2	6, 17	2	9, 4
7	8, 7	65	26	27	5, 62	3	16, 0
5	6, 9	35	42	27	5, 47	2	1, 8
3	10, 6	82	20	47	4, 59	2	1, 3
3	1, 4	37	2	39	4, 49	1	
3	3, 0	65	57	41	4, 48	6	15, 0
2	3, 7	11	5	35	4, 40	1	
1		24	42	35	4, 10	1	
3	1, 5	26	16	23	3, 27	2	1, 0
2	5, 3	68	15	41	2, 37	1	
3	2, 7	46	7	15	2, 28	1	
1		29	31	14*	2, 19	3	0, 7

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	Sec.
28 ω del Dragone	4	17	38	264	32	33	– 5,58
86 μ di Ercole	3.4	17	39	264	39	34*	+35,41
30 del Dragone	6	17	44	266	4	35	21,42
90 *f* di Ercole	6	17	47	266	41	59	29,14
91 θ di Ercole	4	17	49	267	20	40*	30,72
92 ξ di Ercole	4	17	50	267	29	57*	34,72
32 ξ del Dragone	3.4	17	50	267	31	0	15,25
33 γ del Dragone	3	17	52	267	59	25	20,32
Di Ercole, precedente	6	17	53	268	19	21	32,83
Seguente	6	17	54	268	34	24*	32,79
34 ψ 2 del Dragone	6	17	59	269	40	3	–15,74
99 *b* di Ercole	5	17	59	269	51	34	+34,12
103 *o* di Ercole	4	18	0	269	56	7	34,96
36 del Dragone	6	18	13	273	11	9	4,34
40 del Dragone	5	18	15	273	44	45	–66,98
41 del Dragone	5	18	15	273	46	22	66,98
109 di Ercole	4	18	15	273	47	37	+37,99
59 *d* del Serpente	6	18	17	274	14	40	45,91
39 *b* del Dragone	5 6	18	21	275	14	47	13,17
44 χ del Dragone	4.3	18	25	276	9	5	–17,77
Della Lira	5	18	29	277	19	17	+32,89
23 δ dell' Orsa minore	3.4	18	37	279	9	29	–283,53
6 ζ della Lira	5	18	38	279	28	20	+30,82
111 d' Ercole	4 5	18	38	279	32	50	39,54
24 dell' Orsa minore	6	18	44	281	3	52	–320,81
13 π della Lira	6.5	18	49	282	18	45	+27,25
50 del Dragone	6	18	53	283	10	53	–27,75
52 υ del Dragone	4	18	57	284	11	55	10,54
53 del Dragone	5	19	8	286	58	16	+16,99
28 *A* dell' Aquila	6	19	10	287	30	46	41,88

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
2	9,7	68	50	49	— 1,89	1	
2	4,5	27	50	45*	1,86	2	1,0
2	6,8	50	49	53	1,41	4	7,0
1		40	3	18	1,15	1	
2	3,0	37	17	5*	0,93	2	0,0
2	1,5	29	16	43*	0,88	2	1,5
1		56	54	30	0,87	1	
3	8,8	51	31	3	0,70	4	3,8
3	1,5	33	13	43*	0,59	3	1,5
1		33	19	7*	0,50	3	3,0
1		72	1	18	0,12	1	
3	6,0	30	32	43	0,05	1	
3	1,5	28	44	45	0,02	3	14,1
3	0,0	64	19	55*	+ 1,11	3	2,8
1		79	57	25*	1,31	4	1,5
1		79	57	37*	1,32	1	
3	6,0	21	45	36	1,33	1	
1		0	5	5	1,49	3	17,7
2	14,7	58	41	20	1,83	2	1,7
2	12,0	72	38	47	2,14	1	
3	6,0	33	18	30*	2,55	4	1,1
2	24,0	86	33	45	3,18	1	
2	5,9	37	24	21	3,29	2	8,7
2	2,2	17	58	16	3,32	2	3,5
2	143,0	86	55	55*	3,84	4	3,7
6	6,0	43	41	29	4,27	12	9,5
1		75	11	21	4,56	3	6,6
2	4,5	71	1	41	4,91	3	4,2
2	2,2	56	31	22	5,85	2	1,6
2	0,2	12	1	2	6,03	2	12,4

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	Sec.
31 *b* dell' Aquila	6	19	15	288	51	23	42, 09
2 del Cigno	5 6	19	16				
4 dell' Oca	6	19	17				
60 τ del Dragone	4	19	19	289	49	33	− 15, 60
58 π del Dragone	4	19	20	289	54	16	+ 4, 95
7 dell' Oca	5.6	19	21				
7 del Cigno	6	19	23				
38 μ dell' Aquila	4.5	19	24				
4 ε della Saetta	5.6	19	28	292	3	38	40, 61
13 θ del Cigno	4	19	31	292	46	3	24, 12
6 β della Saetta	4	19	32				
18 δ del Cigno	3	19	39	294	40	45	27, 97
17 χ del Cigno	5	19	39				
12 della Volpe	5	19	42				
59 ξ dell' Aquila	5	19	45	296	8	23	43, 43
20 del Cigno	5	19	46	296	24	15	22, 58
21 η del Cigno	4	19	49				33, 67
14 della Volpe	6	19	51				
63 τ dell' Aquila	6	19	54	298	35	39	43, 87
17 della Volpe	4	19	58	299	34	30	38, 53
65 del Dragone	6.5	20	0	300	1	14	10, 29
28 *b* 2 del Cigno	5	20	2	300	29	52*	33, 29
19 della Volpe	6	20	3	300	51	24*	37, 48
18 della Saetta	6	20	8	301	52	59*	39, 42
24 della Volpe	5	20	8	302	3	22*	38, 08
32 del Cigno	5	20	9	302	19	16	27, 73
37 γ del Cigno	3	20	15	303	45	41	32, 16
39 *h* del Cigno	6	20	16	303	58	5*	35, 74
4 ζ del Delfino	5	20	26	306	29	21	41, 93
2 θ di Cefeo	5	20	26	306	33	4	15, 26

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	Sec.	G.	M.	S.	Sec.	N.	Sec.
4	4, 2	11	31	6	+ 6, 47	1	
		29	14	18	6, 53	1	
		19	25	6	6, 57	1	
2	10, 5				6, 78		
3	9, 8	65	19	43	6, 82	1	
		19	52	39	6, 90	1	
		51	55	5	7, 06	1	
		6	58	3	7, 20	2	15, 1
4	4, 5	16	1	36	7, 52	1	
3	3, 1	49	45	48	7, 75	8	10, 1
		17	1	26	7, 83	1	
4	7, 0	44	38	56	8, 36	8	7, 2
		33	16	28	8, 36	1	
		22	6	33	8, 65	1	
3	2, 0	7	57	24	8, 82	2	2, 3
3	9, 0	52	29	4	8, 90	4	14, 6
		34	33	39	9, 15	6	6, 3
		22	34	2	9, 20	2	0, 4
3	9, 7	6	43	27	9, 59	3	1, 8
6	3, 8	23	2	50	9, 88	3	3, 4
3	6, 0	64	4	13	10, 02	3	7, 6
3	9, 2	36	15	36	10, 05	2	3, 6
3	3, 5	26	13	19	10, 27	3	8, 7
3	3, 7	20	59	44	10, 58	1	
4	4, 4	24	3	53	10, 63	3	5, 9
2	2, 0	47	6	22	10, 70	13	10, 1
4	3, 0	39	37	27	11, 12	8	5, 2
5	7, 6	31	33	11	11, 18	2	0, 3
3	1, 5						
3	1, 5	62	19	28	11, 92	4	13, 3

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
6 β del Delfino	3	20	28	307	2	27	41,98
27 della Volpe	5	20	29	307	8	8*	38,24
8 θ del Delfino	6	20	29	307	19	30	42,39
48 del Cigno	6	20	29	307	20	53*	36,42
29 della Volpe	5	20	30	307	23	44*	39,99
73 del Dragone	5	20	34	308	30	18*	− 9,68
50 α del Cigno	1.2	20	35	308	38	56*	+30,54
52 *k* del Cigno	6.5	20	37	309	21	6	37,00
53 ε del Cigno	3	20	38	309	31	43*	35,82
75 del Dragone	6.5	20	40	310	3	40*	−47,84
3 η di Cefeo	4	20	41	310	17	59*	+18,32
31 *r* della Volpe	6.5	20	44	310	53	33	38,45
1 del Cavallino	5	20	49	312	16	10*	45,03
58 ν del Cigno	4	20	50	312	25	45	33,36
76 del Dragone	5.6	20	56	314	2	59	−53,72
5 γ del Cavallino	4	21	1	315	9	24	+43,62
65 τ del Cigno	4.5	21	7	316	42	8	35,52
77 del Dragone	5	21	9	317	18	30	−14,39
67 σ del Cigno	4	21	10	317	23	31	+35,14
66 υ del Cigno	5	21	10	317	25	41	36,78
5 α di Cefèo	3	21	14	318	26	58	21,24
2 *f* di Pegaso	4	21	21	320	13	26	40,57
7 di Cefèo	6	21	24	320	58	15*	17,70
8 β di Cefèo	3	21	26	321	30	24	12,29
73 ρ del Cigno	4	21	26	321	36	44*	33,63
25 *d* dell' Aquario	6	21	29	322	21	4	45,67
8 ε di Pegaso	3	21	34	323	35	29*	44,07
80 π 1 del Cigno	4	21	35	323	45	11	31,69
9 *g* di Pegaso	4	21	35	323	45	37	42,45
11 di Cefèo	5	21	39	324	43	57	13,48

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	*Sec.*	G.	M.	S.	*Sec.*	N.	*Sec.*
3	4, 5						
5	5, 6	25	46	32	+ 12, 09	4	7, 7
3	9, 0	12	37	24	12, 14	1	
3	3, 4	30	53	1	12, 14	3	8, 2
3	8, 8	20	30	30	12, 16	1	
5	15, 3	74	15	55	12, 47	3	6, 8
5	11, 0	44	34	18	12, 51	7	4, 1
4	2, 7	29	59	53	12, 69	6	4, 3
3	4, 0	33	13	40	12, 74	2	0, 0
3	18, 5	80	43	29	12, 89	1	
5	8, 0	61	3	40	12, 95	2	6, 1
4	2, 0	26	21	29	13, 10	4	3, 1
3	1, 6	3	32	17	13, 46	1	
3	1, 3	40	24	21	13, 50	4	4, 6
3	2, 9	81	46	43	13, 92	4	3, 3
2	2, 0	9	20	11	14, 20	2	4, 2
3	9, 0	37	11	48	14, 57	2	4, 7
4	1, 6	77	18	37	14, 72	4	1, 4
2	4, 5				14, 74		
3	4, 5	34	4	1	14, 74	1	
5	8, 2	61	44	22	14, 98	2	0, 2
2	6, 9	22	46	4*	15, 39	3	0, 3
4	8, 8	65	56	19	15, 55	3	2, 0
4	5, 1	69	41	11	15, 67	1	
2	3, 0	44	42	49	15, 69	11	10, 1
4	2, 6	1	21	10	15, 85	3	9, 0
5	2, 8	8	57	55	16, 12	1	
10	9, 2	50	16	46	16, 15	2	1, 4
3	2, 3	16	26	3	16, 15	2	0, 3
1		70	23	34*	16, 35	3	3, 1

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	Sec.
81 π 2 del Cigno	5	21	39	324	51	1*	32, 97
10 di Cefèo	5	21	40	324	55	18	25, 85
12 di Cefèo	6	21	42	325	23	0	26, 43
16 di Pegaso	6	21	44	325	59	29	40, 72
Di Cefèo, precedente	6	21	45	326	19	4	30, 16
21 di Pegaso	5	21	54	328	22	41	44, 01
16 di Cefèo	5	21	56	329	5	4	13, 84
17 ξ di Cefèo	5	21	58	329	30	0	25, 43
26 θ di Pegaso	4	22	0	330	1	34	45, 03
29 π di Pegaso	4	22	1	330	16	34*	39, 69
21 ζ di Cefèo	4	22	4	330	59	4	30, 86
22 λ di Cefèo	6	22	5	331	11	18	30, 23
24 di Cefèo	5	22	6	331	29	3*	17, 67
23 ε di Cefèo	4.5	22	8	331	55	11	31, 94
31 di Pegaso	4	22	12	332	55	11	44, 14
25 di Cefèo	6	22	12	332	55	38	28, 95
2 della Lucertola	5	22	13	333	11	45	36, 75
3 della Lucertola	4	22	16	333	55	52	34, 99
5 della Lucertola	5	22	21	335	18	19	37, 07
27 δ di Cefèo	4	22	22	335	26	36	32, 93
7 della Lucertola	4	22	23	335	45	52*	36, 40
32 di Cefèo in Evelio	5	22	27	336	47	44	—46, 06
9 della Lucertola	4	22	29	337	17	50	+36, 56
40 di Pegaso	6	22	29	337	18	12	43, 35
31 di Cefèo	6	22	31	337	42	25*	21, 70
44 η di Pegaso	3	22	34	338	24	31*	41, 83
48 μ di Pegaso	4	22	40	340	5	27	42, 97
34 di Cefèo in Evelio	6	22	48	341	58	10	1, 27
1 ο di Andromeda	3.4	22	53	343	11	2*	40, 86
54 α di Pegaso	2	22	55	343	42	4*	44, 53

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	Sec.	G.	M.	S.	Sec.	N.	Sec.
4	3, 0	48	23	18	+ 16, 37	12	16, 3
4	4, 3	60	12	14	16, 38	1	
3	9, 0	59	46	11	16, 48	1	
3	2, 3	24	59	24	16, 60	3	1, 8
6	7, 9	54	51	41	16, 66	1	
4	7, 3	10	25	19	17, 05	3	12, 9
6	12, 7	72	13	53	17, 18	1	
2	2, 8	63	39	15	17, 25	4	10, 3
2	2, 2	5	13	19	17, 35	2	2, 6
3	3, 4	32	12	9	17, 39	2	5, 1
4	5, 6	57	13	7	17, 51	1	
2	17, 2	58	25	50*	17, 54	3	3, 6
3	6, 5	71	21	33	17, 59	2	6, 6
2	4, 5	56	3	6	17, 67	1	
4	6, 6						
3	8, 9	61	48	15	17, 83	2	2, 7
2	1, 9	45	32	5	17, 87	11	11, 3
3	1, 2	51	13	56	17, 98	1	
3	3, 0	46	41	16	18, 19	7	3, 9
3	1, 8	57	23	40	18, 21	3	6, 3
3	5, 6	49	15	21	18, 26	5	5, 0
1		85	5	36	18, 40	1	
4	9, 3	50	31	5	18, 47	4	3, 9
3	4, 5	18	29	25*	18, 47	3	1, 5
3	6, 8	72	36	23	18, 52	2	0, 2
3	0, 4	29	10	31	18, 61	2	5, 7
5	13, 0	23	32	53	18, 82	2	6, 3
2	1, 3	82	5	47	19, 04	2	6, 1
5	5, 5	41	15	21	19, 17	7	7, 1
4	6, 0	14	8	7	19, 22	1	

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
36 di Cefèo in Evelio	6.5	22	55	343	52	8	— 1, 30
Di Cefèo	7	22	56	343	54	14	+16, 83
56 di Pegaso	5	22	57	344	20	45	43, 49
6 di Andromeda	6	23	1	345	18	43	41, 30
33 π di Cefèo	5.4	23	2	345	23	40	27, 97
8 di Andromeda	6	23	9	347	7	40	41, 01
34 *o* di Cefèo	5	23	10	347	37	10	35, 82
13 d' Andromeda	6.7	23	18	349	22	50	42, 64
71 *y* di Pegaso	6	23	23	350	52	9	44, 70
72 di Pegaso	6	23	24	351	0	45	44, 12
39 di Cefèo in Evelio	6	23	28	351	53	59	3, 42
16 λ di Andromeda	4	23	28	351	57	16	43, 10
19 κ di Andromeda	5	23	31	352	39	0	43, 53
35 γ di Cefèo	3	23	31	352	48	56	35, 50
5 τ di Cassiope	5.6	23	37	354	20	7	42, 84
79 di Pegaso	6	23	40	354	53	22	45, 00
8 σ di Cassiope	6	23	49	357	13	48*	44, 59
28 ω de' Pesci	5	23	49	357	15	43	45, 83
10 di Cassiope	6	23	56	359	2	14	45, 28
11 β di Cassiope	2.3	23	59	359	38	38	45, 75
87 *u* di Pegaso	5	23	59	359	41	5	45, 91
34 de' Pesci	6.5	24	0	359	56	32	45, 94
22 di Andromeda	5	24	0	359	59	37*	45, 94

FINE

Numero; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni boreali a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	Sec.	G.	M.	S.	Sec.	N.	Sec.
2	9, 5	83	16	37	+ 19, 24	2	10, 5
4	12, 9	79	16	15	24	1	
3	1, 7	24	23	26*	19, 28	3	0, 9
4	6, 9	42	28	19	19, 37	4	4, 7
3	0, 5	74	18	39	19, 38	1	
5	12, 6	47	55	29	19, 52	13	10, 2
4	6, 1	67	1	17	19, 56	2	12, 0
6	11, 2	41	48	57	19, 68	2	0, 2
2	1, 8	21	23	45	19, 77	1	
3	3, 0	30	13	24	19, 78	1	
5	12, 8	86	12	16	19, 83	6	8, 3
2	0, 7	45	22	36	19, 83	4	1, 6
2	0, 5	43	13	41	19, 86	2	0, 7
3	6, 0	76	30	55*	19, 86	3	1, 0
2	3, 0	57	33	21	19, 92	2	1, 5
5	4, 0	27	43	47	19, 94	4	5, 0
2	4, 2	54	38	32	19, 99	5	3, 4
5	2, 2	5	45	30	20, 00	3	1, 9
2	6, 0	63	4	52	20, 02	4	2, 2
4	4, 0	58	2	46*	20, 02	2	1, 0
3	2, 1	17	5	54	20, 02	2	4, 9
2	5, 7	10	1	59	20, 02	1	
3	5, 6	44	57	30	20, 02	4	2, 7

DEL CATALOGO.

Nomi delle stelle e delle costellazioni.	Grandezze.	Ascensioni rette in tempo.		Ascensioni rette a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.
		O.	M.	G.	M.	S.	*Sec.*
10 della Balena	7	0	16	4	5	26	45,91
14 di Mayer	6	0	25	6	19	10	45,88
15 della Balena	7	0	28	6	57	44	45,87
68 *o* della Balena variab.		2	9	32	18	44	45,22
RIGEL	1	5	5	76	13	52	43,06
SIRIO	1	6	36	99	5	0	39,62
51 *θ* della Vergine	4	13	0	194	54	2	46,34
ι del Centauro	3	13	9	197	20	45*	50,22
SPICA	1	13	15	198	40	1	47,19
5 *θ* del Centauro	3	13	55	208	44	11*	52,77
κ del Centauro	4	14	23	215	42	35*	56,20
β del Lupo	3	14	46				
5 *α* 1 del Capricorno	4	20	7	301	38	8*	49,91
6 *α* 2 del Capricorno	3	20	7	301	44	4*	49,92
9 *β* del Capricorno	3	20	10	302	26	16*	50,61
23 *θ* del Capricorno	5	20	55	313	40	7	50,65
22 *β* dell' Aquario	3	21	21	320	15	3	47,68
40 *γ* del Capricorno	4	21	29	322	14	44*	49,82
49 *δ* del Capricorno	3	21	36	323	59	41*	49,55
34 *α* dell' Aquario	3	21	54	328	52	27	45,91
48 *γ* dell' Aquario	3	22	11	332	49	40	46,32
Dell' Aquario	6	22	14	333	25	16	46,86
63 *κ* dell' Aquario	5	22	27	336	50	56	46,67
73 *λ* dell' Aquario	4	22	42	340	32	32	46,95
79 dell'Aq., Fomalhaut	1.2	22	47	341	38	25	49,83
90 *φ* dell' Aquario	5	23	4	345	59	19	46,55
96 dell' Aquario	5	23	9	347	15	20	46,42
33 de' Pesci	5	23	55	358	46	20	45,99

Numero ; e differenze estreme delle osservazioni.		Declinazioni australi a 1 Gennajo 1800.			Variazioni annue.	Numero ; e differenze estreme delle osservazioni.	
N.	Sec.	G.	M.	S.	Sec.	N.	Sec.
6	4,5	1	9	24	— 19,97	3	1,8
3	4,5	1	36	13	19 90	3	2,4
6	2,0	1	36	12	19,87	4	7,5
2	1,5	3	53	28	16,91	5	6,4
25	10,2	8	26	28*	4,76	2	0,0
15	12,4	16	27	4	+ 4,53	3	5,1
3	3,0	4	28	2	19,35	3	6,0
2	2,0	35	38	55	19,11	2	0,7
5	10,5	10	6	42*	19,00	2	0,0
2	2,2	35	22	28	17,56	4	6,2
1		41	16	7	16,25	4	6,0
		42	18	55	15,02	2	0,9
3	4,5	13	6	48	— 10,50	3	2,4
5	3,0						
4	5,6	15	24	3	10,74	1	
1		18	1	5*	13,83	3	0,5
3	1,7	6	26	28	15,40	3	1,4
3	3,1	17	33	17	15,83	3	1,8
4	5,0	17	1	22	16,20	3	0,1
6	9,0	1	17	5	17,13	4	7,3
3	3,0	2	23	20	17,81	1	
4	10,5	5	50	50	17,90	1	
3	6,0	5	15	17*	18,41	3	1,2
3	3,0	8	38	17	18,88	3	3,4
4	7,4	30	40	38	18,81	1	
2	2,0	7	7	24	19,43	7	11,4
2	2,1	6	12	53	19,53	4	6,1
1		6	49	33	20,02	4	2,3

Declinazioni, per ordine, delle stelle boreali contenute nel Catalogo, con le relative ascensioni rette in tempo.

Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette
0° 1'	7^h 1'	7° 36'	16^h 41'	14° 0'	20^h 26
5	18 17	44	9 27	5	16 4
18	0 54	57	19 45	8	2 22
35	4 27	59	15 37	8	22 55
56	4 18	8 58	16 36	14	6 1
1 21	21 29	58	21 34	51	13 19
24	4 48	9 1	3 16	15 8	4 8
30	10 46	20	21 1	19	16 43
31	16 12	38	5 51	52	0 39
2 6	4 44	42	16 48	16 2	19 28
26	16 21	47	5 24	21	6 49
54	11 40	48	8 6	26	21 35
3 18	10 11	10 2	0 0	48	13 40
20	5 12	25	21 54	17 1	19 32
21	5 12	30	16 45	6	23 59
32	20 49	31	3 37	17	14 31
33	2 52	11 5	4 43	42	8 14
4 0	5 28	6	17 9	49	14 36
26	12 10	12	22 12	58	18 38
29	12 46	28	8 57	18 19	1 43
41	6 13	31	19 15	23	15 52
46	11 50	34	2 26	29	22 29
5 13	22 0	36	2 34	46	15 40
25	3 53	53	0 56	53	8 33
33	9 28	12 1	19 10	19 25	19 97
37	16 38	14	3 20	31	11 20
44	7 29	19	6 5	49	1 44
45	23 49	22	0 12	53	19 21
6 12	13 12	36	6 5	56	14 42
32	13 8	37	20 29	57	10 36
36	4 39	13 12	0 14	58	1 1
43	19 54	16	1 29	20 14	14 7
58	19 24	27	15 32	18	3 3
7 9	8 36	38	1 25	31	20 30
21	5 44	55	20 28	58	13 31

Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette
21° 0'	20^b 8'	26° 57'	9^b 41'	33° 16'	19^b 39'
7	8 21	27 16	7 41	18	2 5
24	23 23	44	23 40	19	17 54
42	18 15	51	17 39	19	18 29
22 7	19 42	28 21	7 51	24	10 20
10	12 29	30	7 33	40	15 16
20	0 47	39	0 19	34 4	21 10
20	12 43	45	18 0	11	11 8
33	6 3	53	13 3	18	5 14
34	19 51	29 1	1 1	23	16 7
36	6 11	11	22 34	33	0 59
46	21 21	14	19 16	34	19 49
23 3	19 58	17	17 50	49	10 14
9	14 23	24	12 17	35 12	3 46
13	11 51	31	17 35	17	10 42
16	5 52	41	10 5	29	7 25
33	22 40	48	15 19	41	0 8
24 4	20 8	30 0	20 37	42	16 56
23	22 57	13	23 24	59	9 19
29	5 37	33	17 59	36 8	1 43
43	17 13	37	14 26	10	13 10
59	21 44	44	0 52	16	20 2
25 3	12 6	53	20 29	17	15 44
13	12 19	31 7	2 45	26	10 14
40	2 50	15	14 23	52	0 11
41	12 21	20	8 42	52	12 56
47	20 29	33	20 16	37 3	17 8
26 3	14 1	44	10 35	12	21 7
6	7 58	32 12	22 1	17	17 49
12	1 9	19	7 22	18	15 32
13	20 3	28	10 4	24	18 38
16	17 23	37	0 26	25	0 46
21	20 44	33 1	10 27	29	2 38
37	10 56	14	17 53	38	9 6
41	15 41	14	20 38	44	10 16

Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette
38° 5'	1^h 59'	42° 51'	16^h 28'	47° 8'	3^h 29'
5	15 17	59	5 49	31	3 22
22	0 31	43 14	23 31	37	1 26
32	15 49	22	1 28	53	4 0
34	21 10	31	4 48	55	23 9
41	6 39	39	12 14	56	8 50
51	2 46	41	18 49	57	11 28
57	10 28	44	15 48	48 22	2 31
39 33	1 29	54	10 5	23	21 39
37	20 15	44 5	2 56	26	14 57
38	6 58	15	10 42	49	8 45
59	0 39	29	1 11	56	14 59
40 3	17 47	34	20 35	49 8	3 10
4	6 25	39	19 39	15	22 23
8	12 16	42	6 29	22	6 9
22	12 36	43	21 26	34	12 39
24	1 25	44	11 28	40	2 15
24	20 50	58	0 0	41	1 31
46	4 49	45 20	6 43	46	19 31
57	4 53	23	23 28	50 3	13 26
41 3	7 10	28	16 2	17	21 35
11	14 54	32	22 13	19	13 40
13	7 4	35	10 58	31	7 7
15	22 53	47	5 2	31	22 29
22	1 52	58	1 18	44	13 10
31	15 24	46 2	9 34	45	9 43
47	12 6	7	17 34	50	17 44
49	23 18	10	0 58	51 14	22 16
56	3 32	27	2 6	19	4 51
42 0	6 37	31	8 27	31	17 52
20	16 22	36	15 57	55	19 23
28	23 1	41	22 21	56	2 40
30	10 10	57	9 36	52 4	7 53
36	3 8	47 1	14 9	18	14 9
51	10 10	6	20 9	29	19 46

Declinazioni	Ascensioni rette
52° 43'	2^h 50'
48	0 26
53 4	4 24
20	16 32
25	0 21
56	13 32
54 19	12 8
33	12 5
39	23 49
48	11 43
52	21 45
55	2 9
55 26	0 29
26	13 39
58	13 16
56 1	5 30
3	22 8
22	13 26
31	19 8
45	0 37
49	5 30
50	5 34
54	17 50
57 13	22 4
20	5 6
24	22 22
33	23 37
53	5 2
58 2	9 32
3	23 59
26	22 5
41	18 21
59 4	6 2
30	12 21
38	0 45
59° 40'	15^h 21'
46	21 42
58	9 37
60 8	4 46
12	21 40
23	10 39
43	0 13
58	7 59
59	13 21
61 4	20 41
20	3 59
44	21 14
48	22 12
49	5 22
50	0 22
58	16 21
62 14	8 58
19	20 26
26	4 55
42	8 37
50	10 51
63 5	23 56
18	7 28
25	1 48
39	21 58
49	12 33
54	1 48
55	9 15
64 4	20 0
20	18 13
54	3 3
58	16 40
65 1	8 23
20	19 20
26	16 55
65° 35'	1^h 59'
56	21 24
58	17 8
66 6	10 3
31	12 47
34	10 10
45	10 28
67 1	23 10
5	1 12
40	8 51
41	12 52
42	1 41
46	6 30
53	12 39
68 16	17 33
24	8 44
51	17 38
69 12	16 28
14	1 17
36	1 28
41	21 26
56	1 46
70 24	21 39
26	11 19
36	1 52
42	3 30
42	9 17
71 2	18 57
22	22 6
26	1 47
72 1	1 23
1	17 59
14	21 56
33	15 17
33	15 17

Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette	Declinazioni	Ascensioni rette
72° 36'	22^b 31'	76° 35'	14^b 28'	82° 45'	6^b 45'
39	18 25	77 12	6 31	83 17	22 55
46	14 41	19	16 10	34	10 5
48	14 45	19	21 9	84 30	12 48
59	19 19	78 1	15 38	30	12 48
73 9	9 24	24	15 52	85 6	22 27
54	0 33	29	14 10	11	0 44
74 6	2 42	33	12 2	15	9 58
16	20 34	79 16	22 56	86 12	23 28
19	23 2	45	6 10	34	18 37
21	2 43	57	18 15	42	11 54
40	15 6	58	18 15	56	18 44
58	14 51	80 43	20 40	87 17	6 3
75 9	1 47	81 47	20 56	33	12 14
11	18 53	82 6	22 48	88 14	0 52
33	14 5	11	9 7	40	10 34
76 18	1 46	13	11 17	48	12 14
31	23 31	21	17 7		

SAG-

SAGGIO
SOPRA IL FLUIDO GALVANICO

Di Anton Maria Vassalli-Eandi

Ricevuto il dì 21 Marzo 1803.

§. 1.

Origine del Galvanismo.

L'attribuire all' azione d' un fluido attivissimo i principali fenomeni della natura è cosa cotanto antica, che la sua origine è involta nelle tenebre dell' antichità. Sanconiatone attribuì ad un fluido sottile sparso per l' aria la conservazione dell' Universo. Questo fluido, che secondo questo antichissimo Scrittore, unisce, e separa le cose naturali, è pur desso l' anima umana. Empedocle in Grecia, e Pitagora in Italia proposero un analogo sistema insegnando essere un fluido sottile il motore universale della natura, o l' anima del mondo. S. Agostino medesimo assegnò il sentire, o la memoria delle bestie ad un fluido vitale formato dal sangue. Paracelso, ed una folla di altri medici attribuirono tutte le malattie al difetto d' un fluido sottilissimo sparso attorno a tutti i corpi. Finalmente lo stesso Newton nel libro 3.° dell' Ottica ascrisse ad un fluido sottilissimo, che penetra tutti i corpi, e sta nascosto sulla loro sostanza l' attrazione, e la coesione delle parti, la forza attraente e ripulsiva dei corpi elettrici; l' emanazione, la riflessione, e le altre proprietà della luce, le sensazioni, ed i movimenti degli animali, e dice mancarci soltanto le sperienze sufficienti per determinare esattamente le leggi, secondo le quali agisce questo fluido.

do. L' idea dunque di un fluido principale motore della natura si può dire essere stata in ogni tempo, o ciò si debba ripetere dall' orgoglio dell' uomo, che mal soffre il confessare l' ignoranza di molte cose, o da una tradizione, che superò le catastrofi del nostro globo, o da qualunque altra cagione. La questione fu soltanto riguardo alla natura di tale fluido. Essa fu creduta diversa nei varii tempi, e l' osservazione accidentale di alcuni fenomeni contribuì ancora a stabilire un' opinione di preferenza ad un' altra. Quindi l' Agente universale fu detto aereo, acqueo, igneo, magnetico, ora per significare essere desso della natura di tali corpi conosciuti, ora per analogia mancando le voci per esprimere esseri nuovi, tanto più poco noti. Parecchie proprietà della calamita essendo conosciute, al fluido che le produce, o ad altro analogo furono particolarmente ascritti i principali fenomeni della natura; anzi se leggiamo gli Scrittori della Filosofia corpusculare, del magnetismo, nella cognizione delle leggi del fluido magnetico consisteva la misteriosa scienza degli antichi Sacerdoti, ed, alla medesima erano appoggiati i Giudizj di Dio, che dal 13.° al 15.° Secolo furono cotanto in uso per iscoprire per l' azione del magnetismo universale gli occulti assassini, e scrittori rinomati ispiegarono colle fisiche leggi un tale barbaro sistema.

Il fluido elettrico per le sue attrazioni, e ripulsioni, per la sua massima sottigliezza, ed attività fu da molti creduto l' anima universale della natura anche prima che si conoscessero le principali leggi del medesimo; ed una tale opinione cadde, e rinacque più volte all' occasione di qualche fenomeno particolare, o che colpì la fantasia di Scrittori di grido, che seppero ravvicinare i fatti dispersi, e per mezzo dell' elettricità rendere ragione di quanto ci presenta l' universo organico, ed inorganico. Ma questi parti dell' immaginazione ebbero la breve esistenza di quanto non è fondato su le invariabili leggi della natura, e nella loro caduta trassero pure seco loro nel disprezzo, e nell' oblio molte utili, ed importanti verità, delle quali si potrebbe tessere una serie scorrendo le opere di Teofrasto, di Gilberto, di La Perriere, di Tressan, di Bertholon, di Gardini, e degli altri elettricisti. I sistemi dimenticati lasciano sovente le loro traccie, e quasi direi i loro germi pronti a svilupparsi tosto che si presentino favorevoli circostanze, ed è pure ad un tale germe che siamo debitori della scoperta del. fluido detto Galvanico, giacche il Professore Bolognese Luigi Galvani avendo fisso nella sua mente essere l' elettricità animale il vincolo, che unisce l' anima al corpo, ed il mezzo onde l' uno sull' altro agisce, quando la moglie gli fece osservare, che toccando con ferro i nervi di una rana di fresco uccisa, e posta in non grande distanza dal conduttore elettrico, si contraggono i suoi muscoli nell' istante che si tirano le scintille dal conduttore, il Cel. Galvani in vece di vedere in questo fenomeno l' azione conosciuta dell' elettricità ordinaria sopra gli animali, poichè la rana tocca dall' atmosfera elettrica del conduttore perde l' elettricità naturale, che si diffonde nei corpi circostanti, e quando si estrae la scintilla dal conduttore cessando la pressione dell' atmosfera elettrica, la rana trovandosi priva dell' elettricità naturale la attira dai corpi vicini, i quali se sono deferenti essa vi passa precipitosamente, onde la agita come ci convincono mille altri fenomeni analoghi, se i corpi vicini sono coibenti, l' elettricità passa lentamente da questi nella rana, perciò essa non è scossa; il Professore di Bologna in vece di questa quanto semplice altrettanto nota verità vide in tale fenomeno una conferma della sua teoria dell' elettricità animale, e variando in molte guise l' esperienza col concorso di parecchi fortunati accidenti giunse ad ottenere le contrazioni musculari col solo contatto con un corpo deferente, dei nervi e dei muscoli di un animale recentemente ucciso, nel che gli giovò moltissimo l' opera del suo degno Nipote Gioanni Aldini anch' esso Professore nell' Università di Bologna.

§. 2.

Dell' apparecchio Galvanico, o sia dell' Elettro-motore.

La teoria delle contrazioni musculari, che si eccitano toccando i nervi, ed i muscoli di un animale con un corpo deferente dell' elettricità proposta dal Professore Galvani, appena pubblicata percorse tutta l' Europa con la rapidità del lampo, ed in tutte le principali Città vi furono tosto diversi fisici che si occuparono delle sperienze Galvaniche variate in moltissime maniere. Parecchi Scrittori, come suole sempre accadere, negarono l' onore della scoperta al Galvani, ritrovando descritti gli stessi, od analoghi fenomeni nei proprj, od altrui scritti: ma siccome non basta indicare una verità senza conoscerne le conseguenze, oppure queste accennare confusamente per essere riconosciuto autore del sistema alla medesima da altri appoggiato; così il pubblico imparziale stupefatto di aver così tardi riflettuto a fenomeni assai comuni, conservò al Galvani l' onore della scoperta per averne eccitata l' attenzione, ed esposta chiaramente la teoria. Dalle sperienze furono dedotte varie modificazioni della spiegazione dei fenomeni proposta dal Galvani, ed alcuni ancora credettero essere dessa interamente ipotetica, potendosi render ragione dei medesimi senza ricorrere ad alcuna elettricità propria dell' animale. Tra questi si rese celebre pei suoi lavori il Pavese Professore Alessandro Volta, il quale convenne doversi ripetere le contrazioni musculari dall' elettricità; ma affermò, che questa non è punto animale bensì la comune messa in movimento dal contatto dei metalli, o di corpi inegualmente deferenti dell' elettricità, onde le rane preparate non sono in questa teoria altro, che elettrometri più sensibili degli altri, perciò mossi dalla debolissima elettricità eccitata dal contatto di due corpi d' ineguale deferenza. Le opposizioni del Volta diedero luogo a diversi interessanti lavori di Galvani, e de' suoi seguaci, e le opere di questi ad altri esperimenti del Volta. Intanto che diffondeva la sua opinione, ciascheduno meditava nuove sperienze onde confermarla, e dopo circa otto anni d'indefesso lavoro il Professore Volta considerando, che sugli sperimenti sopra le rane havvi il contatto di due metalli eterogenei, e dell'umido animale, avendo già da qualche tempo ottenuta elettricità sensibile nell'elettrometro col replicato contatto di due lamine metalliche, immaginò di moltiplicare tali contatti per ottenere segni d'elettricità in elettrometri meno sensibili, che le rane di fresco uccise. Nelle moltiplici sue sperienze avendo veduto, che il contatto dello zinco, e dell'argento eccitava maggiormente le contrazioni, e che esse erano risvegliate quando si bagnava l'animale con acqua salsa, pensò di servirsi di tali metalli, e della soluzione di muriato di soda per formare il suo apparecchio. A tal fine fatto costrurre buon numero di lamine di zinco, ed ugual numero di lamine d'argento, e tutte piegate in arco le accollò due a due, una di zinco, e l'altra di argento, e le pose in tante tazze in modo che gli estremi di ciascun arco fossero in due tazze separate, e che tutte comunicassero per via degli archi metallici eccetto la prima, e l'ultima tazza, che ricevono gli estremi di un arco solo. Ciò fatto empì le tazze colla soluzione di muriato di soda, indi toccò l'umido della prima, e dell'ultima tazza con le due mani contemporaneamente, ed ebbe una piccola scossa analoga a quelle, che fa sentire la torpedine viva quando si tocca. Dall'avere per maggior comodo disposte le tazze in giro chiamò tale apparecchio *a corona;* dalla sensazione, che produce lo disse torpillare, o torpedinoso, e dall'effetto, val a dire dal mettere l'elettricità in movimento (secondo la sua teoria) lo nominò *elettro-motore*. Scoperto l'eccitamento del fluido detto galvanico (da chi diè luogo ad immaginare l'apparecchio, che lo sviluppa con la scoperta delle contrazioni nelle rane) per mezzo del contatto dei metalli eterogenei, e di un corpo umido, fu facil cosa il modificar l' apparecchio, e l' esaminare l' azione di tale fluido sopra i tre regni della natura. Si ridussero gli archi metallici in dischi, e si frapposero uguali dischi bagnati fra i medesimi per dare all' apparecchio la forma di cilindro, o di pila, che è più comoda, si fissarono verticalmente nel piedestallo della pila tre cilindretti di vetro per sostenerla senza impedirne l' azione, si fecero dischi di varia grandezza, e piattetti di varie figure; si esperimentò il contatto dei diversi metalli, si frapposero dischi bagnati con varj liquori; con soluzione di diversi sali, con gli umori animali, e vegetabili; e si dedussero parecchie verità importanti riguardo al miglior modo di costrurre l' elettro-motore in oggi ridotto di facile trasporto, e di poca spesa, qual' è quello, che ho descritto nel foglio 121. del Giornale della 27. Divisione militare. Esso consiste in dischi di zinco, e di rame della grandezza di uno scudo, ed in dischi di lana alquanto più piccoli, in un piedestallo di legno, che racchiude tre libbre di piombo perchè abbia la necessaria stabilità con cilindretti di vetro mobili pel facile trasporto, ma tenuti in sesto da un disco di legno traforato in punti corrispondenti ai tre fori del piedestallo nei quali s' infiggono, in conduttori di cordoncini d' oro, e d' argento, ed in tubi di cristallo chiusi da una parte con turacciolo di sovero pei quali passano fili d' oro, o di altri metalli eterogenei posti sempre alternativamente secondo lo stesso ordine, come sarebbe rame, lana, zinco, rame, lana, zinco, e così di seguito, e bagnando la lana in acqua saturata di muriato d' ammoniaca si forma un elettro-motore, che presenta la scintilla visibile anche a chiaro giorno, e gli effetti principali del fluido Galvanico tanto sopra i corpi organici, che sopra gli inorganici. Siccome l' effetto dell' elettro-motore dipende dalla natura dei metalli eterogenei coi quali si forma, del liquido, che loro si frappone, dal numero dei dischi, e dalla loro grandezza, è chiaro che facendo uso di liquido più opportuno, dei metalli che l' esperienza dimostrò più efficaci nella costruzione della pila dando loro maggior estensione, e moltiplicando i dischi si hanno maggiori effetti; parimenti siccome dal numero dei dischi principalmente dipende la scossa, conviene far le pile alte anzichè ampie. Si evita poi la facilità a rovesciarle facendo più elettro-motori comunicanti per via di conduttori metallici. I metalli, che Volta trovò più acconci a formare gli elettro-motori sono argento, rame, ferro, stagno, piombo, e zinco, e formando l' apparecchio con due dei proprj metalli, quello che ritrovasi alla destra nella serie indicata si fa abbondante di fluido, e quello della sinistra resta mancante. Così prendendo i due estremi, che sono quelli che presentano maggiori effetti, l' argento resta negativo, e lo zinco positivo. Laonde se la pila comincia in fondo per argento finirà in cima per zinco. La sua base sarà negativa, e la sommità positiva, vice versa se comincierà per zinco. Nelle *sperienze sopra il fluido dell' elettro-motore*, che stampai nel volume dell' Accademia delle Scienze di Torino, esaminai l' attività di diverse qualità d' argento ridotto in pila con uguali dischi di zinco, e trovai, che l' argento puro è meno atto che quello che contiene un decimo di lega, che è il più opportuno procurando una maggiore ossidazione dello zinco, ed ossidandosi anche più l' argento misto. Provai pur anche che gli effetti della pila sono sino ad un certo segno in ragione dell' ossidazione, quindi l' oro e la platina non sono opportuni come già osservò il Cel. Vauquelin. Dissi sino ad un certo segno, perchè se l' ossidazione si faccia troppo precipitosamente, si disperde il fluido mentre si forma l' apparecchio. Per la stessa ragione i liquidi, che ossidano maggiormente i metalli ci procurano anche un maggior effetto; onde l' acqua saturata di muriato di soda, di muriato d' ammoniaca, d' acido sulfurico, nitrico, ec. l' orina, e generalmente i liquidi animali, e vegetabili sono migliori, che l' acqua pura per bagnare i dischi di lana o di cotone da frapporre a quelli di metallo; le soluzioni saline troppo concentrate non sono opportune perchè fanno troppo celeremente l' ossidazione. I liquidi, che non ossidano i metalli rendono inefficace la pila nell' esaminare gli effetti della quale, convien pure aver riguardo alla sua azione come corpo deferente, tanto più se trattisi di animali di fresco uccisi, per non confondere l' azione del Conduttore con quella dell' elettro-motore. Ciaschedun componente dell' apparecchio in un trattato completo del fluido galvanico può formar un non breve articolo. Si fecero elettro-motori portentosi pel numero, e per la grandezza dei dischi, si formarono questi con molti corpi di varia natura, in generale non si considerarono abbastanza le condizioni necessarie per ottenere il massimo effetto dei corpi, che si trovarono atti a formare l' apparecchio. Si formarono pile con un sol metallo servendosi di diversi liquidi, questi possono pure scambievolmente reagire, ed esternare il fluido senza il corso di alcun metallo; io feci apparecchj combinando il carbone ordinario, l' argilla ec. coi metalli; altri ne fecero combinando diversi liquidi con carta, carbone, lana, e non vi ha dubbio, che si troveranno ancora altre combinazioni di varj corpi atte a sviluppare il fluido galvanico. Qualora si vuol far passare il fluido dell' elettro-motore per qualche corpo, una parte essenziale dell' apparecchio sono i conduttori. Se il fluido è debole, una piccolissima invisibile interruzione in un conduttore basta a rattenerlo: dal che avviene che l' azione s' interrompe sovente, e si restituisce con un leggiero contatto dei conduttori o dell' apparecchio, perchè tale contatto è sufficiente a cambiar la posizione di quel punto, che impediva il corso del fluido. Non di rado si attribuisce alla natura del corpo che serve di conduttore, ciò che non è dovuto che all' umido, od alla soluzione salina onde è coperto. I conduttori somministrano un facile metodo di modificare l' azione di una pila presentando un più, o meno libero passaggio al fluido, che si estrica. I metalli, e sulfuri metallici, i minerali, che contengono i metalli non ossidati, il carbone, i muscoli, e tutte le parti animali umide, de, le soluzioni saline, i liquidi animali, e vegetabili ec. sono conduttori del fluido galvanico, come dell' elettrico. Il vetro, la cera lacca, gli ossidi metallici, i sali secchi, il legno, le resine, gli olj ec. ne sono coibenti. Il galvanismo, che uccide un animale non supera l' ostacolo, che è superato da una debole elettricità. Si desiderano ancora sperienze esatte per determinare i gradi di deferenza, e di coibenza di vari corpi. Ho fatto molte combinazioni di dischi di varia grandezza alternativamente ridotti in pila, e con diversi conduttori, l' azione di questa è molto più sensibile, e costante, che quella dei dischi. In queste ricerche il grado della temperatura deesi pure segnare, avendo anche molta influenza sopra gli effetti dell' elettro-motore. Confermata in mille guise l' azione prodigiosa di quest' apparecchio, diversi fisici cercarono di togliere l' onore della sua scoperta al Volta riducendolo al doppiatore di Bennet. Non v'ha dubbio, che Sulzer conobbe l' azione reciproca del piombo, e dell' argento, che Bennet fece sperienze, che più si appressimarono alla formazione della pila, che altri dissero, che le contrazioni nelle rane sono prodotte dall' elettricità eccitata dal contatto dei metalli, ma nessuno prima del Volta formò l' elettro-motore, onde ad esso dee spettare l' intera gloria dell' invenzione. Altrimenti la decomposizione dell' acqua, la teoria elettrica, quella dei colori, il sesso delle piante, e simili saranno cose note alla più remota antichità. Nelle *conghietture sopra l' arte di tirare i fulmini appo gli Antichi* recai diverse testimonianze che sembrano provare, che gli antichi conobbero la teoria elettrica quanto Franklin; anche a questo, passato l' entusiasmo eccitato dalla sua scoperta, si cercò di togliere l' onore dell' invenzione; ma i fisici imparziali non glielo contrastarono, e gli altri accostumati in seguito al peso della sua superiorità in questa parte, gli restituirono la gloria dovuta.

§. 3.

Della natura, e delle proprietà del Fluido Galvanico.

Il Cel. Volta avendo immaginato l' elettro-motore per convincere, che il contatto dei metalli con un corpo umido è sufficiente a mettere in movimento l' elettricità ordinaria diffusa in tutti i corpi, disse che il fluido che si estrica con tale apparecchio non è altro, che l' elettricità dei corpi che lo compongono. Ed in vero esso è sottilissimo come il fuoco elettrico, è trasmesso, e respinto dai medesimi corpi; condensato risplende come l' elettricità: com' essa ossida i metalli, decompone l' acqua nei due gaz ossigeno ed idrogeno, scuote gli animali facendosi particolarmente sentire nelle articolazioni, ha un sapore particolare, annulla il colore ceruleo vegetabile, e finalmente mostrasi nell' elettromotore, nel quale si esamina il suo stato positivo o negativo, ossia di condensazione o di rarefazione. Con tanti argomenti di analogia parea, che nessuno potesse mettere in dubbio l' identità dei due fluidi elettrico, e galvanico; tuttavia esaminando l' azione di questo sopra diversi corpi, dagli effetti osservati parecchi Scrittori conchiusero essere il fluido galvanico positivo un acido, ed il fluido negativo un alcali, altri col Ritter dissero, che l' acqua non si decompone dal fluido galvanico nè positivo, nè negativo, ma che il positivo con un principio preso dall' acqua forma il gaz ossigeno, ed il negativo con altro principio preso dallo stesso liquido forma il gaz idrogeno; altri affermarono, che il fluido galvanico decomponendo l' acqua vi toglie dalla parte positiva l' ossigeno lasciandovi l' idrogeno sovrabbondante, e dalla parte negativa l' idrogeno rimanendovi sovrabbondante l' ossigeno. Finalmente altri credettero, che il fluido galvanico decomponendo l' acqua presenti il gaz ossigeno tosto formamato, quando i metalli non sono ossidabili, e si serva del gas idrogeno per veicolo a portarsi all'altro filo metallico, lasciandovi il gaz idrogeno alla superficie del filo mentre lo penetra. Se i metalli sono ossidabili, l'ossigeno nel separarsi dall' idrogeno si fissa nel metallo. Mentre i fisici erano tutti intenti ad esaminare gli effetti del fluido galvanico, ed a norma de' fenomeni che presentavansi, ne immaginarono le spiegazioni con varie ipotesi particolarmente stabilite su la natura diversa del fluido galvanico positivo dal negativo, l'inventore dell' elettro-motore ripetea all' Istituto Nazionale di Francia le prove dei fondamenti della sua teoria, mostrando che col contatto di due metalli eterogenei si eccita elettricità sensibile nell' elettrometro raccogliendola per via del condensatore. In seguito a tali prove la maggior parte dei fisici Italiani, e Francesi riconobbe l' identità del fluido galvanico ed elettrico, e quasi si riputò a vergogna il dubitarne, onde l' elettro-motore si considerò una nuova macchina atta a mettere in movimento l' elettricità ordinaria per via del contatto di metalli eterogenei, e di un corpo umido. Siccome però in fisica non già su l' autorità, ma bensì su la natura deesi fondar un' opinione per giudicare se il fluido galvanico non è diverso dall' elettrico, convien esaminarne e paragonarne i fenomeni.

1.° Portando un metallo od altro corpo deferente in contatto dei nervi, e dei muscoli corrispondenti di una rana di fresco uccisa, si eccitano le contrazioni nei muscoli, e se la rana non è molto vivace, si hanno violenti e continuate contrazioni, portando i muscoli in contatto dei nervi senza alcun corso metallico, o di altro corpo deferente. Volta dice che tali contrazioni si deggiono ripetere dall' elettricità ordinaria messa in movimento dal contatto di corpi dotati di capacità diversa per contenere l' elettricità. Se ciò è, come mai non si evitano le contrazioni elettrizzando l' armatura dei nervi col fregimento di un cilindretto di vetro, o di cera lacca, e neppure esistono le contrazioni toccando contemporaneaneamente i muscoli con un corpo deferente, anzi nemmeno elettrizzando contemporaneamente i nervi col vetro, ed i muscoli colla cera lacca, o viceversa. In questo caso non vi ha dubbio, che esiste il flusso dell' elettricità ordinaria dai nervi ai muscoli, o viceversa secondo che si elettrizzano i nervi col vetro, o colla cera lacca. Che questa elettricità è sensibilissima agli elettrometri senza l'ajuto di alcun condensatore; e che essa è infinitamente più forte di quella, che si può eccitare col semplice contatto di corpi dotati di vario grado di deferenza; oppure non si hanno alcune benchè menome contrazioni, onde pare potersi ragionevolmente dubitare come dissi sin dal principio del 1794. *Physica experimentalis Tom.* 2. non essere l'elettricità ordinaria mossa dal contatto dei corpi, che eccita la contrazione.

2.° L' elettricità blanda della macchina elettrica scorre con la celerità di mille piedi parigini per secondo nei fili metallici, di cinquecento piedi per secondo in una funicella bagnata, e di circa cento piedi per secondo nella medesima funicella non bagnata; laonde pare, che se il fluido galvanico fosse elettricità ordinaria, dovrebbe in un istante diffondersi per tutta la pila, ed equilibrarsi essendo essa ben più deferente della funicella bagnata; e se ad ogni momento si eccita nuova elettricità dal contatto, ad ogni momento dovrebbe pur anco distribuirsi in ragione di capacità in tutte le parti dell' apparecchio, come l' elettricità ordinaria si distribuisce in tutte le parti di un conduttore; ma vediamo che ciò non succede, dunque possiamo sospettare, che l' elettricità dell' elettro-motore è diversa dall' elettricità ordinaria, che si eccita col fregamento dei corpi coibenti, e che attirasi dall' atmosfera. Tale sospetto è pure confermato dalla considerazione che l' umido, principale impedimento all' ottenere i fenomeni elettrici ordinarj, è la condizione necessaria per avere quelli del galvanismo, e che comunque disperso per tutto l' apparecchio non ne impedisce l' azione se non è raccolto in liquido, che formi un conduttore tra tutte le parti. Inoltre volendo far passare il corrente galvanico in due tubi distinti pieni d' acqua alti otto pollici ciascuno guerniti di filo di platina, ed immersi nello stesso bicchiere, si vede. 1.° che il fluido impiega un tempo sensibile prima che si mostri al secondo filo comunicante col conduttore negativo. 2.° che tolto il conduttore positivo il filo negativo continua per qualche tempo a somministrar il gaz idrogeno pel fluido, che dall' acqua continua a passarvi. L' elettricità all' opposto nell' istante scorre per la medesima; e tolta al filo in cui entra, nell' istante cessa nell' altro. Ben è vero, che in esperienze fatte sopra un filo metallico lungo cinquanta piedi, giudicai dalla sensazione del lampo negli occhi, che il fluido galvanico impiegasse un secondo a percorrerlo, e che in altre sperienze sopra un filo metallico lungo ducento piedi non potei ravvisare un tempo sensibile tra il contatto dell' estremo del filo alla sommità positiva di una pila di 25. coppie di dischi di rame, e zinco, e la sensazione della scossa nel dito, che toccava l' altro estremo del filo metallico, mentre con l' altra mano toccava la base della pila; ma queste sperienze, che tendono ad identificare l' elettricità ed il galvanismo, non distruggono le riflessioni ed esperienze contrarie. (*)

3.° L' odore ed il sapore servono sovente a distinguere i corpi, e le loro modificazioni, onde quando queste qualità sono sensibili nei corpi che si paragonano, non deggionsi certamente negligentare. Il liquido che si frap-

---

(*) Per un filo metallico di mille piedi parigini non solo le scariche della boccia di Leyda, e le scintille, ma ancora l' elettricità dell' atmosfera del conduttore passava liberamente ed attirava tosto l' elettrometro d' Hauy. Il fluido galvanico non passò per cinquanta piedi di questo cordoncino d'oro (probabilmente per esser interrotto il metallo in qualche punto), e conduttori di due piedi non agirono punto sul detto elettrometro, sebbene dassero scosse insoffribili, che mi eccitarono male al capo.

pone ai metalli eterogenei nella costruzione della pila, altera l' odore dei medesimi metalli, perciò l' odore del fluido galvanico appare diverso nei varii elettro-motori; e sebbene alcuni, cui feci esaminar tal odore, l' abbiano trovato analogo a quello del piombo pesto di fresco, tuttavia non oserei accordare un odore particolare al fluido dell' apparecchio galvanico. All' opposto l' odore del fluido elettrico tanto positivo, che negativo è sempre lo stesso analogo all' odore di fosforo, comunque si derivi per una sostanza animale, vegetabile, e minerale, oppure si elettrizzino tali corpi negativamente, ed il proprio fuoco elettrico ordinario ad essi si trasmetta. Laonde l' ordinaria elettricità è dotata di un odore particolare, che conservasi costantemente lo stesso, ed è sensibilissimo anche nella blanda elettricità artificiale, e nell' elettricità delle nubi; il fluido galvanico se è dotato di qualche odore, egli è così debole che a stento si distingue, ed è diverso da quello dell' elettricità comune.

4.° Il sapore acido fu una delle prime qualità conosciute del fluido galvanico, anzi Sulzer si serve di tale proprietà per ispiegare la varietà delle sensazioni, e del 1767. che pubblicò la sua *Nouvelle Théorie des plaisirs*, reca come cosa curiosa l' esempio del sapor acido eccitato dall' unione di due pezze, una d'argento, l'altra di piombo sovrapposte l' una all' altra in modo, che i bordi formino un piano, cui si accosta la lingua per aver il sapor analogo a quello di vetriolo di ferro, sapore, che non appartiene ad alcuna delle due pezze esaminate separatamente. Facendo uso di due dischi, uno d' argento, l' altro di zinco, e frapponendovi la lingua, il sapore acido che sentesi a ciascun contatto dei bordi dei due dischi, sembrami analogo a quello dell' acetosa. Applicando alla lingua il conduttore positivo, od il negativo di un elettro-motore che agisca assai fortemente, e toccando col dito bagnato l' altro estremo della pila, si ha costantemente il sapore acido troppo forte per dar una sensazione piacevole, ma sempre acido; come pure sentesi sempre picancante astringente il sapore dell' elettricità ordinaria tanto positiva , che negativa di qualunque natura animale , vegetabile , o minerale sia il conduttore , purchè il sapore di questi non offuschi quello dell' elettricità . Laonde due fluidi galvanico , ed elettrico sono dotati ciascheduno di un sapore particolare costante nei medesimi , condensato e rarefatto ; ma questo sapore è affatto diverso, essendo analogo a quello degli acidi il sapore del fluido galvanico , ed analogo a quello degli alcali il sapore del fluido elettrico ordinario . Siccome nel fluido galvanico , così nell' elettrico il sapore costante è più , o meno intenso secondo la diversa intensità del fluido .

5.° Esaminando i fenomeni della luce nel galvanismo, e nell' elettricità si scorgono pure differenze assai rimarchevoli . I corpi deferenti abbondanti d' elettricità mostrano al bujo stellette , o penicilli di luce a tutte le punte, che sporgono secondo che sono negativamente , o positivamente elettrizzati , e la boccia di Leyda caricata d' elettricità per l' uncino essendo isolata , e munita di due punte , l' una all' uncino l' altra all' armatura esterna, mostra nelle tenebre il penicillo alla prima , e la stelletta all' altra punta . La pila del Volta carica a segno di uccider in pochi minuti rane , topi , passeri , piccioni , comunque isolata o munita di punte ai suoi estremi , non mostra al bujo la menoma luce . Toccandone la parte superiore con una punta si veggono frequenti scintilluzze per lo più rossigne, val a dire del colore dell' elettricità meno condensata ; un tubo di vetro fregato con lana , o seta presenta numerose scintille più bianchiccie cioè del colore dell' elettricità condensata , per la qual cosa si può affermare , che l' elettricità debolissima risplende assai più , che il galvanismo fortissimo in paragone dell' elettricità di un tubo di vetro fregato , e che riguardo alla boccia di Leyda , alla quale si riferisce l' apparecchio galvanico , i fenomeni della luce sono cotanto diversi , che non si possono punto paragonare .

6.° Nè minori sono le differenze , che presentano i due fluidi elettrico, e galvanico all' udito. Quando si carica un conduttore elettrico, se nel medesimo trovansi alcune punte, il fuoco che esce da queste, produce uno scoppiettio assai sensibile anche alla distanza di alcuni passi, un analogo rumoretto si ha scorrendo il dito per un bastone di cera lacca, o per un tubo di vetro ben fregato. Molte persone sentono lo scoppiettio dell' elettricità, che mostrasi in scintilluzze al bujo quando si spogliano le loro vesti.

Le scroscianti scintille, che eccitansi sul dorso de' gatti per via del fregamento formano il divertimento de' ragazzi.

In tutti questi casi l' elettricità mostrasi ne' suoi effetti infinitamente più debole del fluido galvanico, che si ha da una pila composta di 40. coppie di dischi di rame, e di zinco della grandezza di uno scudo; eppure comunque circondata di punti essa non presenta il menomo rumorìo, anzi è così debole il rumore delle scintille che estraggonsi, che molti le credono silenziose. Questa pila dicesi una boccia di Leyda di nuova specie, le scintille che estraggonsi sono adunque le scariche della boccia di Leyda; ma queste sono risplendentissime e molto fragorose, quelle della pila mostrano una debolissima luce, e sono quasi silenziose.

Non parlo per ora degli effetti della pila, e della boccia di Leyda, che potrebbonsi dire inversamente corrispondenti al loro rumore, bastando avvertire che riguardo al rumore non differiscono meno, che riguardo all' odore, al sapore, ed alla luce i due fluidi galvanico, ed elettrico.

7.° Non maggiore analogia presentano questi due fluidi al tatto. L'elettricità tanto positiva, che negativa presenta alla mano posta in qualche distanza dal corpo elettrico la sensazione di un venticello prodotto dal fluido che entra, o che ne esce; comunque si avvicini la mano all' elettro-motore, non si ha alcuna analoga sensazione, che anzi non si ha nemmeno alcuna sensazione all' apice della lingua portato in menoma distanza dall' estremo della pila, quando ad esso si accosta per sentire il gusto del fluido galvanico. Le scintille elettriche scuotono di più, e presentano una sensazione meno durevole; diversa si è la scossa dell' elettro-motore, e quantunque più debole ne resta per più lungo tempo la sensazione, e chiunque non prevenuto la sensazione dei due fluidi paragona, vi riconosce una sensibilissima differenza.

Laonde nessuno dei cinque organi dei sensi mostra la medesimezza dei due fluidi galvanico, ed elettrico, anzi per via di ciascheduno si riconosce in essi non piccola differenza.

8.° Nelle sperienze, ed osservazioni sopra il fluido dell' elettro-motore stampate nel volume ultimo dell' Accademia delle Scienze di Torino dimostrai la differenza degli effetti dei fluidi galvanico, ed elettrico sopra i tre regni della natura, differenza cotanto grande, che senza la prevenzione dell' identità, e la cognizione di molte proprietà analoghe non si sarebbe sospettata la medesimezza di tali fluidi. Per conciliare la forza straordinaria del galvanismo in paragone di quella dell' elettricità, Volta ricorre al continuo svolgimento del primo, che forma un' azione continuata, la quale, dice egli, supera nei suoi effetti una maggiore azione interrotta. Ma nella macchina elettrica di Nairne facendo comunicare il corpo coi due conduttori positivo, e negativo, si ha parimenti la continuazione dell' azione, eppure i suoi effetti da me esaminati in compagnia del mio collega Rossi, ed in presenza di molte persone, non si trovarono maggiori di quelli delle altre macchine elettriche, ed infinitamente più deboli di quelli della pila, della quale i due conduttori positivo, e negativo rappresentano lo stato elettrico. Se altre ragioni non mi dimostrassero la differenza dei due fluidi galvanico ed elettrico, spiegherei piuttosto la sua maggiore azione per via della sua tenuità, onde penetra maggiormente i corpi sui quali una maggior dose passa senza internarsi tanto, e le fortissime scintille emularebbero in questa teoria gli effetti dell' elettro-motore per la tenue parte delle medesime, che esse disperdono all' intorno. Ma non è mio scopo il difendere la teoria del Volta, perciò ritorno agli argomenti, che si oppongono no alla medesima. L' esperienza che parmi stabilire una differenza assoluta trà il fluido galvanico, e l' elettrico si è, che comunque si elettrizzino positivamente, o negativamente gli estremi della pila, non se ne altera la sua azione, mentre se i fenomeni della pila fossero dovuti all' elettricità ordinaria, dovrebbero crescere quando si elettrizza positivamente l' estremo positivo della pila, e diminuire quando esso si elettrizza negativamente, e viceversa, giacchè è cosa fuori d' ogni dubbio, che le elettricità omologhe si rinforzano, e le contrarie si distruggono.

9.° L' attività della fiamma per disperdere l' elettricità presentandole un libero passaggio nell' aria rarefatta è notissima, e ci serviamo della fiamma per attirare dall' atmosfera l' elettricità naturale, per togliere silenziosamente ad un corpo l' elettricità onde abbonda. La fiamma posta tra' conduttori della pila in modo, che gli lambisca amendue non altera punto la sua azione al di là della fiamma, la quale allora soltanto interrompe il corso del fluido quando abbrucia i fili conduttori perchè gli ossida, e per gli ossidi metallici non passa il galvanismo. Se il conduttore del fluido galvanico sia abbruciato dalla fiamma solamente da una parte, il fluido continua a passare come se il conduttore fosse intatto. Analogo a quello della fiamma si è l' effetto del vacuo sopra i fenomeni elettrici, essi cessano perchè nel vuoto si disperde l' elettricità, e secondo le sperienze dei celebri Biot, e Cuvier la pila nel vuoto agisce ugualmente che all' aria libera.

10.° Finalmente l' elettricità più debole si manifesta nel mio elettrometro a listerelle d' oro (Mem. de l' Accademie de Turin Tom. V. Physicæ Experim. Tom. 2.) senza il soccorso del condensatore, e muove il mobilissimo elettrometro di Hauy. Il fluido d' una pila composta di quaranta coppie di dischi di rame, e zinco, e di quaranta dischi di lana bagnata nel muriato d' ammoniaca, fluido che uccide un passero, un sorcio ec. in pochi minuti, che scuote dolorosamente, toccando gli estremi della pila colle dita bagnate, che passa per sei persone che si toccano colle mani bagnate, questo fluido cotanto potente non muove punto l' elettrometro d' Hauy, ed appena è sensibile qualche volta nel mio; eppure questo è mobile ad una settecentesima parte di grano di cera di Spagna raschiata sopra, e la sola compressione della cera lacca lo elettrizza in modo da attirar l' elettrometro d' Hauy; questi stromenti non sono mossi dai conduttori della suddetta pila, dunque il fluido che essa presenta è diverso dall' elettricità ordinaria. Per averne segni nei suddetti elettrometri, cercai di raccogliere il fluido galvanico in disco di zinco armato di manico di cera lacca posto alla sommità positiva della pila, ma nemmen con questo artificio potei ottenerli. A tutti i fenomeni sin quì narrati potrei agevolmente aggiungerne molti altri, che converrebbero ad un trattato del galvanismo; per un saggio sembranmi bastanti i riferiti per potere ragionevolmente mettere molto in dubbio la medesimezza dei due fluidi galvanico, ed elettrico. L' analogia, che essi presentano mi porta bensì a giudicarli rigagnoli separati della stessa sorgente, i quali per essere passati per terreni diversi hanno acquistate proprietà che gli distinguono interamente, sebbene ne mantengono alcune comuni. Come dissi nelle varie Memorie stampate sopra questo soggetto, io non amo di rinoscere nella natura una moltiplicità di principj; quando con le modificazioni di un solo posso rendere ragione dei fenomeni; perciò il calorico, il fuoco elettrico, il fluido galvanico sono modificazioni dello stesso principio, al quale parmi pure potersi ridurre il magnetismo, le affinità, e l' attrazione universale. Ma ove gli manca la guida dell' esperienza, e dell' osservazione, il fisico entra nel regno de' sogni, che può bensì compiacere la fantasia, ma non mai accrescere la Scienza; perciò ricordando il detto del Poeta, che secondo il Redi tutto seppe, e di tutto seppe maravigliosamente scrivere.

- - - - - - - - - s' egli erra,
L' opinìon mi disse de' mortali,

Dove chiave del senso non disserra,
Certo non ti dovrian punger gli strali
D' ammirazione omai; poi dietro ai sensi
Vedi che la ragione ha corte l' ali.

Lasciate le conghietture ritornerò ai fatti esaminando alcuni effetti del fluido galvanico sopra i tre regni della natura.

§. 4.

Dell' azione del fluido galvanico sopra gli animali, e del suo uso medico.

L' apparecchio detto galvanico preparato da poco tempo, se si tocchi colle dita bagnate contemporaneamente ai suoi estremi, fa sentire una scossa analoga bensì all' elettrica, ma da essa distintissima. Per mancanza di termini di paragone sovente si paragonano le cose che hanno pochissimo rapporto. Chi sentì la scossa della torpedine, a questa, anzichè a quella della boccia di Leyda rapporta quella dell' elettro-motore, ed in vero essa è meno dolorosa nell' istante, ma lascia un certo torpore nelle dita, che non si sente dopo le scosse elettriche molto più forti; se il corrente galvanico passi per gli occhi, per le orecchie, pel cervello, per gli intestini, le sue scosse sono molto più dolorose, ed anche pericolose. Facendole passare per la testa di un decapitato da un orecchio all' altro, dal cervello alle narici, alla lingua, si eccitano nel capo convulsioni spaventose, che non di rado presentano negli occhi, e nei muscoli del viso l' aspetto di un uomo nell' eccesso dell' ira, facendolo passare per l' occhio separato, si vede restringersi, o dilatarsi la pupilla. Facendo passare il corrente galvanico dalla midolla oblongata al diaframma, si mettono in movimento i visceri contenuti nella cavità del petto; Il cuore ricupera il suo movimento, e riempiendo le arterie di un liquido alla temperatura del sangue, rinascono le pulsazioni. Facendo passare il corrente galvanico dall' esofago all'

all' intestino retto si rieccita il movimento peristaltico lungo il canale. Se un muscolo serva di conduttore, le contrazioni nel medesimo sono così forti, che si accorcia anche della metà. Facendo comunicare gli estremi di questo muscolo con la macchina e la catena isolati, mentre si eccita un'elettricità assai forte non succedono variazioni; lasciando fisso un conduttore, comunicando od estraendo dall'altro estremo del muscolo scintille assai forti, le contrazioni appena eguagliano la centesima parte di quelle, che si hanno col fluido galvanico. L'azione di questo fluido sopra gli animali viventi è più forte di quella che si ha sopra i cadaveri in ragione della maggiore vitalità, la quale vedesi pure contribuire assaissimo nei corpi estinti, essendo le loro contrazioni non solo in ragione del minor tempo che sono morti, ma ancora del vigore che avevano in vita, di modo che visitando prima del supplizio le vittime della giustizia, dal loro stato di salute, dalla lor forza d' animo, si presagisce la forza de' fenomeni galvanici che i loro corpi presenteranno. In un giovine robusto, e coraggioso le contrazioni furono così violenti, che il tronco si sollevò circa un palmo dalla tavola: ma appunto la maggior forza, che manifesta l' azione galvanica negli animali vivi la rende pericolosa, ed in vero passando dalla bocca all' ano il fluido di una mediocre pila, in breve tempo uccise un vecchio piccione, pel quale si erano fatte passare più scariche fulminanti del quadro Frankliniano, senza che un'ora dopo manifestasse il menomo male mangiando all'ordinario. I passeri, le rane, i sorci sono in pochi istanti uccisi da scosse della pila, che prese colle dita non oltre passano la seconda articolazione.

Laonde il fluido galvanico per la sua massima attività può somministrare un ottimo rimedio all' arte medica; ma rimedio da usarsi con tutte le cautele potendo essere dannosissimo. Chi si diverte d'esperienze galvaniche, soventi prova un' agitazione, od irritazione universale, che gli toglie anche il dormire. I liquidi animali sono da questo fluido decomposti, onde il conduttore metallico che in contatto dei medesimi si pone, si ossida come da un acido. M' accadde pure di produrre in una rana una forte timpanitide. Quindi è chiara la ragione delle alterazioni, che tal fluido produce nell' economia animale. Se gravi malori, e la morte sono il risultato dell' abuso di tale fluido, guarigioni portentose sono l' effetto del ragionevole uso del medesimo. Le cure di sordi, ciechi, paralitici operatesi da due anni per mezzo dell' elettro-motore formerebbero non piccolo volume. Nel Saggio che stampai sopra l' uso medico dei fluidi galvanico ed elettrico, recai l' esempio di una gotta serena, e di una paralisi da me guarite, e dei sintomi caratteristici dell' idrofobia svaniti con una sola galvanizzazione, somministrata dal celebre mio collega Francesco Rossi ad un uomo qualche tempo prima morsicato da un cane rabbioso. Dopo quel tempo ebbi occasione di operare parecchie altre cure, e di vederne altre operate dal suddetto mio collega, ma vidi pur anco altri danni cagionati dall' abuso del galvanismo, onde replicai l' avviso che già aveva dato sin dal principio della scoperta di questo fluido, di non adoperarlo che con grande cautela, tanto più in dosi abbondanti, applicando ad esso quanto Boerhaave (Elem. Chemiae p. 3. proc. 198.) disse di altro potentissimo rimedio = mira praestat in multis morbis incurabilibus. At prudenter a prudente Medico! Abstine si methodum nescis = Dai noti effetti è chiaro convenire il galvanismo nei morbi di languore e di ostruzioni, essere il medesimo dannoso in molte altre malattie, e doversi secondo le varie circostanze somministrare in diversa dose, e replicatamente a diverse ore opportune.

L' analogia dell' elettricità, e del galvanismo nell' essere trasmessi dai metalli, e dai corpi umidi ci somministra un metodo agevolissimo di amministrarlo nella dose desiderata, servendosi di più, o meno buoni conduttori secondo che maggiore, o minore dose se ne vuole trasmettere; al che aggiungendo ancora la resistenza, che prova questo fluido do a penetrare nelle parti asciutte del corpo animale, si può ancora modificare l' azione bagnando più, o meno, e con acqua semplice, o salata le parti nelle quali si vuol far passare. Conoscendo la natura del fluido galvanico, e lo stato degli animali ai quali si vuol amministrare, certamente si possono ottenere effetti portentosi liberando anche dalla tomba persone, che per un' accidentale sospensione delle vitali funzioni morirebbero senza l'ajuto di un rimedio così possente; come osservai succedere in animali affogati, e suffocati collo stringimento della gola, e vidde il sopra lodato collega Rossi in animali osfixiati coi gaz non respirabili. In tutti questi casi il galvanismo somministrato per tempo restituì il vigore agli animali, ben inteso, che esso è inutile quando i loro corpi sono già cadaveri, nei quali si possono bensì eccitare movimenti analoghi ai vitali, ma non si può dar loro la vita. Nei casi di morte apparente somministrando il fluido galvanico conviene ricordarsi, che passando questo per gli organi principali uccide gli animali viventi, onde badare a non uccidere i semivivi col rimedio male applicato; così volendo rieccitare i movimenti del cuore, giova far passare il corrente galvanico non già nell' organo medesimo, ma nelle parti vicine.

§. 5.

Dell' azione del fluido galvanico sopra i vegetabili.

La decomposizione dell' acqua, che fu uno dei primi effetti conosciuti del fluido galvanico, e l' analogia tra le piante e gli animali, dopo quanto accennai nel §. antecedente assicura un' azione sensibile del fluido galvanico sopra vegetabili. Ma sopra tale oggetto non occorre di servirsi d' induzioni, nè di ragionamenti avendo sperienze dirette, che comprovano tale azione. Il Cel. mio collega Dottor Giulio la scorsa state mi invitò ad esaminar seco l' azione dell'elettro-motore sopra le piante dette sensitive. Egli aveva già al-

alcuni anni avanti studiato particolarmente la tessitura di questi vegetabili per iscoprirne l'organo irritabile, che trovò essere un musculetto posto alla base del picciuolo della foglia; servendosi di tale notizia si armarono i muscoli di varie specie di sensitive con listerelle sottilissime di foglia di stagno, le quali si estendevano a diversi rami. Il giorno dopo verso il mezzo giorno essendo ben dilatate tutte le foglie, si formò la pila con cinquanta scudi da cinque franchi, cinquanta uguali dischi d'argento, e cinquanta dischi di cartone bagnati in acqua saturata di muriato di Soda, e facendo uso di sottilissimi cordoncini d'oro per tradurre il fluido galvanico, se ne fece passare il corrente per le armature dei muscoli delle piante. Al principio non si ebbe alcun indizio di mutazione nelle medesime quantunque le scosse della pila fossero assai forti, e più attive delle scintille elettriche, che fanno chiudere le foglie delle sensitive; ma dopo parecchi minuti cominciarono a piegarsi le foglie più vicine al conduttore positivo, indi successivamente le altre più rimote, di poi i rami, e gli ultimi movimenti si ebbero mezz'ora dopo. Avendo replicata diversi giorni l'esperienza, e sopra varie specie di sensitive, e sopra le parti sessuali di altre piante, in ciascun giorno abbiamo sempre avuto simili risultati. Il Dottore Giulio pubblicherà queste sperienze con tutti i detagli; intanto avendole io comunicate ad un nostro consocio mi rispose, che Creve negli Annali d'Ustero avea pubblicato esperienze sopra lo stesso soggetto, che però egli dubita, che qualche azione meccanica abbia potuto produrre i movimenti da noi osservati nelle sensitive. Non mi riuscì di avere il fascicolo XV. citatomi degli Annali d'Ustero, ma sono persuaso che le mutazioni occorse nelle piante da noi esaminate non furono cagionate da alcuna azione meccanica. Giacchè si usarono tutte le precauzioni per evitare tale dubbio 1.° Armando le piante da galvanizzare il giorno avanti con fogliette metalliche sottilissime. 2.° Servendosi di conduttori leggierissimi, e questi ancora appoggiati perchè non agissesero con tutto il loro peso sopra la pianta. 3.° Facendoli comunicare con piccoli uncini sporgenti formati con le medesime listerelle di foglia metallica. 4.° Perchè avendo posti gli estremi degli stessi conduttori separati dalla pila con la medesima delicatezza sopra alcune foglie, queste non si mossero. Inoltre i movimenti che succedono nelle sensitive per azione meccanica, si presentano tosto in seguito all' azione, quelli prodotti dal galvanismo, non si vedono che qualche tempo dopo, e successivamente nelle parti più lontane, la qual cosa mostra la successiva azione del fluido galvanico, il quale scorrendo più difficilmente per gli umori vegetabili che per gli animali, agisce più lentamente e meno in quelli, che in questi. Lo stesso Dottor Giulio avendo in seguito provato a galvanizzare germi di grano posti sopra cottone umido osservò, che germogliarono, e crebbero più presto di altri germi posti nelle medesime circostanze ad eccezione della galvanizzazione. Sebbene questo fatto non sia che una conseguenza dell' azione del fluido galvanico sopra l' acqua, esso stabilisce però un altro punto d' analogia tra il fluido galvanico, e l' elettricità, la quale accelera sempre la vegetazione quando la sua azione non è impedita da un' atmosfera omologa, come dimostrai nelle sperienze stampate sopra questo soggetto. Alcuni tentativi fatti sopra l' influsso galvanico su la germinazione, non mi diedero risultati abbastanza decisivi; continuo ad occuparmene facendo il paragone tra la germinazione, e lo svolgimento dei germi animali. In fine di diversi paragrafi delle sopraccitate sperienze sopra il fluido dell' elettro-motore, ho aggiunto parecchie sperienze a farsi per conoscere vieppiù la natura di questo fluido. Uno scritto (che non potrebbe esser breve) sopra quanto rimane a tentarsi su tale soggetto sarebbe utilissimo, come pure una storia di questo ramo di fisica, che raccogliesse per ordine di materie i fatti dispersi pubblicati in diversi paesi, ed a diverse epoche. Già indicai altrove la diversità, che osservai tra gli animali uccisi dall' elettricità, e quele quelli uccisi dal fluido galvanico riguardo allo stato delle loro carni; il paragone degli effetti sulla putrefazione delle sostanze animali e vegetabili somministrerà pure nuovi argomenti sul rapporto di questi due fluidi.

§. 6.

Dell' azione del fluido galvanico sopra i corpi inorganici.

Che il fluido galvanico passando traverso all' acqua la decomponga nell' uscire dal conduttore positivo, e mostri una sorgente di bollicine di gaz ossigeno, che si eleva dal filo metallico d' oro, o di platina, e nell' entrare l' altro filo metallico immerso nell' acqua (che comunica col conduttore negativo) presenti alla superficie di questo una sorgente di bollicine di gaz idrogeno, è cosa notissima, come pure che se i metalli onde sono composti i fili immersi nell' acqua sono di facile ossidazione, non escluso l' argento, il filo che comunica col conduttore positivo si ossida, e quello che comunica col conduttore negativo presenta la suddetta sorgente di gaz idrogeno. Laonde non vi ha dubbio, che il fluido dell' elettro-motore decomponga l' acqua, giacchè servendosi di fili d' oro puro, che passino pel medesimo turacciolo per immergersi nell' acqua, quando questi sono fuori della medesima interamente nel gaz formato, facendovi attraversare la scintilla elettrica si ha l' esplosione, e la riduzione di tutto il gaz in acqua, (*per l' ordinario i fili metallici restano lambenti l' acqua, ed allora convien inclinare il tubo in modo, che l' acqua non tocchi più i fili, perchè la scintilla passi pel gaz, ciò che si ottiene facilmente servendosi di tubi piegati in arco per far la decomposizione dell' acqua. Allora si mettono all' inclinazione, che si desidera nell' arco di legno che li sostiene. Quando rimangono goccie d' acqua appese ai fili, continuando queste a decomporsi, il gaz si profonda più che i fili.*) Se poi i fili sono d' oro con lega, o di me-

metalli ossidabili, allora il metallo ossidabile si attrae l' ossigeno, e si copre d' ossido, ed il carbonico del medesimo gazificato si presenta sotto la forma di gaz acido carbonico, oppure si unisce alla calce sciolta nell' acqua e la precipita, quando si fa passare il fluido dell' elettro-motore per acqua di calce per mezzo di fili di metallo ossidabile immersi nella medesima. Allorchè il gaz carbonico non è assorbito dalla calce esso rimane dopo la combustione dei gaz. I fenomeni dell' ossidazione dei metalli nella decomposizione dell' acqua per via del fluido galvanico, formerebbero un articolo assai lungo in un trattato del galvanismo, in un Saggio basterà accennare, che l' ossido d' argento è bianco nell' atto della sua formazione, e tale si conserva al bujo, ma esso è colorato dalla luce, che in ragione dell' intensità lo fa passare per tutte le tinte sino al nero oscuro, ed in questo stato continuando l' azione della luce solare diretta, si rivivifica l' argento lungo il tubo, e mostrasi in forma metallica. L' ossido del rame riceve una tinta cerulea dal gaz carbonico, che si forma nella sua ossidazione. Gli altri ossidi sono pure modificati, ed il platina medesimo esposto ad una lunga azione del fluido galvanico per decomporre l' acqua, si copre di una crosta sottile di ossido bianco, che non cangia colore per l'impressione della luce, e le sue parti mantengono un' adesione sufficiente a conservare la forma del filo dal quale si separarono. Il fluido galvanico condensato ossia accresciuto per via di elettro-motori composti di numerose coppie di dischi, oppure per mezzo di un minor numero di dischi di straordinaria grandezza, abbrucia tutti i corpi combustibili, i quali presentano nella combustione diversi fenomeni analoghi alla loro diversa natura.

I colori, particolarmente l' azzurro vegetabile per la proprietà di cangiarsi in rosso quando è tocco dagli acidi, ed in verde dagli alkali, furono pure sottoposti all' azione della pila galvanica per esaminarne la natura del fluido. Quando si osservò il conduttore positivo tingere la tintura di eliotropio in rosso, o per meglio dir in giallo, ed il conduttore negativo tingerla in verde, si giudicò essere il fluido galvanico positivo un acido, ed il negativo un alkali, nel che si avrebbe pure un nuovo argomento d' identità col fluido elettrico già detto di tale natura da alcuni suoi effetti. In questi giudizj però non si è fatta la riflessione, che l' elettricità negativa non è punto diversa dalla positiva se non nella densità, spiegandosi per mezzo di un solo fluido tutti i fenomeni, che si ripetono da due fluidi di natura diversa, che si dimostrano non solo inutili, ma ancora insussistenti, e che il fluido negativo della pila è lo stesso, che passando in maggior copia in alcuni metalli si mostra positivo in questi secondo la stessa teoria del Volta, e del Presidente della Società di Medicina di Lione Petétin. Laonde i diversi effetti del fluido positivo, e del negativo deggionsi attribuire alla diversa azione dello stesso fluido condensato, o rarefatto, anzichè alla diversa natura de' fluidi positivo e negativo.

Avendo continuato per qualche tempo l' esame dell' azione del fluido galvanico sui colori mi si offersero alcuni fenomeni degni di attenzione: immergendo i due conduttori nella tintura acquea (la spiritosa non mi mostrò variazioni dall' azione del fluido galvanico) di tornasole, si forma una materia tosto sotto la superficie, che pare albume biggio ceruleo, esso occupa gran parte della superficie del liquido. Facendo decomporre la stessa tintura contenuta in un tubo per via di fili di platina, si precipita in parte la materia colorante in forma di fiocchi tra i tubi, senza che la tintura mostri sensibile variazione eccetto nell' intensità. Ponendo una piccola dose di tintura in una barchetta di carbone, indi immersivi gli estremi dei conduttori dell' elettro-motore, si osserva formarsi una schiuma bianchiccia attorno ai medesimi, la quale diventa rosacea alla circonferenza. Sovente presentasi più rosso di rosa attorno al conduttore negativo, che attorno al positivo. Se vogliasi spiegar il rosso per via dell' ossigeno, questo colore attorno al conduttore negativo ci mostra,

stra, che esso è portato dal fluido galvanico proveniente dal conduttore positivo, e ci dà la ragione della riduzione totale del gaz in acqua, quando si fa la decomposizione di questa per via di fili d'oro puro, sebbene i gaz che presentansi ai due fili positivo, e negativo non siano nella proporzione richiesta per la formazione dell'acqua. Raccogliendo i gaz in tubi separati gli trovai per lo più nella proporzione di cinque d'ossigeno, e due d'idrogeno, mentre secondo il Lavoisier deggiono essere nella proporzione di 17. al 3. per formar l'acqua. Lasciando consumar tutto il liquido, qualche volta la schiuma del conduttore positivo resta di color giallo, e quella del negativo di color verde chiaro; altre volte si distrugge il colore sotto il conduttore positivo, e si cangia in biggio sotto il negativo. Sottoponendo all'azione galvanica carta colorita in azzurro con colori vegetabili, essa non soffre variazione se è asciutta, se è stata bagnata prima di farvi passar il fluido della pila, comincia a venir gialla sotto il conduttore positivo, indi il suo colore è distrutto affatto, e qualche volta verdeggia, altre volte gialleggia sotto il conduttore negativo. M' accadde pur anco di vedere verdeggiare la carta azzurra sotto il conduttore positivo, altre volte ingiallita, esponendola all'azione debolissima di un elettromotore, azione cotanto debole, che dovea riflettere per sentirne il gusto del fluido toccando la base della pila col dito bagnato, e la sommità della medesima coll'apice della lingua. Anche l'azione del fluido galvanico sui colori richiede un lungo discorso per essere esaminata ne' suoi detagli, e sui colori diversi, e di varia natura fissati sopra diversi corpi. Intanto l'ultima accennata osservazione conferma, che la differenza degli effetti del fluido positivo, e del negativo è prodotta dalla diversa intensità del medesimo fluido. Avendo sottoposto all'azione galvanica un pezzo di panno bagnato, e colorato di buona tinta azzurra, il colore fu distrutto sotto amendue i conduttori, maggiormente però sotto il positivo ove vedeasi una polvere bianca, cioè l'argilla dell'allume, che servì alla tintura.

Cruinskank, e Simon ottennero per mezzo del fluido dell' elettro-motore la decomposizione dell' acido sulfurico. Servendosi di fili d'oro ebbero dal conduttore negativo il gaz idrogeno sulfurato, e la precipitazione dello zolfo. Sostituendo fili di platina a quelli d'oro non ebbero che gaz idrogeno. Il filo d'oro comunicante col conduttore positivo fu corroso, e precipitò in oro di porpora. Lo stesso Cruinskank avendo esposta all'azione del fluido galvanico una soluzione di nitrato d'argento sovra saturata d'ammoniaca, per mezzo di fili d'oro ebbe dal conduttore negativo il precipitato d'argento in istato metallico, dal conduttore positivo la precipitazione dell' argento fulminante di Berthollet. Lo stesso risultato ottenne dalla sola ammoniaca che decompose col fluido galvanico, servendosi di fili d'oro, e di platina; ottenne pure la revivificazione degli ossidi metallici, e la decomposizione di parecchi sali. Simon riempiendo due tubi nei quali penetravano fili d'oro, di acqua distillata, e facendo comunicare inferiormente questi tubi per mezzo di fibre musculari, ottenne nell' uno e nell'altro tubo bolle di gaz, che nel tubo comunicante col conduttore positivo avea l'odor dell' acido muriatico, e l'oro fu alquanto corroso, e precipitato; nel tubo comunicante col conduttore negativo l'acqua sentiva l'ammoniaca. Con lo stesso apparato senza fibre musculari ottenne la sola ammoniaca dal conduttore negativo. Avendo io stesso sottoposto all'azione galvanica l'alcool e l'acido nitrico, ne ottenni la decomposizione. La soluzione di muriato d'ammoniaca esposta all'azione galvanica per mezzo di fili d'oro, decompose questo metallo ossidandolo in nero dalla parte positiva, ed in giallo dalla parte negativa. In tutti questi fenomeni osservati da diversi autori succedono parecchie variazioni dovute alla diversa intensità del fluido, i prodotti del quale essendo di natura opposta come l'acido e l'alcali, apre un vasto campo a spiegare con pochi principj diversamente soltanto modificati i fenomeni tutti della natura. Poichè essendo cosa dimostrata essere la medesima elettricità, che condensata presentasi positiva, rarefatta si presenta negativa, e nella teoria ricevuta più comunemente non essendo altro il fluido dell' elettro-motore, che l' elettricità dei metalli rarefatta nell' argento, condensata nello zinco, è chiaro che ottenendosi effetti opposti dalla modificazione dello stesso fluido, molti altri corpi che per li loro effetti credonsi di natura diversa, possono essere modificazioni diverse dello stesso principio.

§. 7.°

Dell' uso del fluido galvanico nelle Scienze, e nelle arti.

Nel §. quarto già accennai l' uso medico del galvanismo, che per la sua massima azione su gli animali viventi può presentare un utilissimo rimedio, ed un mezzo sicuro di conoscere, se è veramente affatto estinta la vitalità in un corpo, mettendone in azione gli ultimi residui insensibili agli altri stimoli. A questi usi già si pensò da parecchi, ma nessuno che siami noto, osservando che tutti gli altri metalli somministrano abbondante gaz acido carbonico, quando servono di conduttore per decomporre l' acqua per via del fluido della pila del Volta, nessuno credo, ha immaginato di servirsi del fluido galvanico per conoscere se vi è lega nell' oro. È vero, che vi sono altri mezzi di conoscerla; ma è sempre utile averne uno di più, che qualche volta può anche riuscire più comodo: riguardo all' oro il fluido galvanico può pur anco somministrarcene lamelle, che difficilmente si potrebbero ottenere ugualmente sottili con altro metodo; val a dire separare le tenuissime lamelle d' oro, che sono sopra quelle d' argento dorato. Servendosi di queste dorate lamelle d' argento per decomporre l' acqua, l' argento si ossida, e cade rimanendo la lamina d' oro infinitamente più sottile di quella dei battilori, onde serviranno per far elettro-metri, o ad altri usi. Siccome il fluido galvanico unito a diversi sali presenta varj gradi d' ossidazione dell' oro medesimo, anche per questa proprietà può essere vantaggioso alle scienze, ed alle arti: esso servirà parimente a procurarsi diversi ossidi degli altri metalli; l' uso grandissimo di queste arti basterebbe a stabilire l' utilità del galvanismo nelle medesime. Le scienze Fisico-chimiche possono pure profittare non poco di tale proprietà, e più ancora della forza particolare, che ha il galvanismo di decomporre i sali, forza per la quale si otterranno per mezzo di questo fluido diverse decomposizioni, che probabilmente non si sarebbero mai ottenute con altri mezzi. Nel §. antecedente abbiamo osservato essersi formati acidi, ed alcali col far passare il fluido dell' elettro-motore per diversi corpi. L' applicazione di tal fluido all' investigazion della genesi di queste e di altre sostanze, che l' esperienza somministrerà, può spandere la maggior luce su le operazioni della natura, particolarmente su le variazioni prodotte nei corpi dal calorico modificato in molte maniere. In oggi si conoscono molti effetti della luce, che si attribuivano ad altre cagioni, si possono pêr mezzo del fluido galvanico scoprire nuove proprietà del calorico, dell' elettricità, e di altri fluidi. L' azione indicata superiormente del fluido della pila sopra i colori apre un vastissimo campo di ricerche utili alle scienze, ed alle arti. Sopra la medesima carta azzurra tinta con colori vegetabili, le impressioni del fluido galvanico, quelle del conduttore positivo ora furono assai diverse da quelle del conduttore negativo, ora furono affatto simili non variando che nell' estensione minore sotto il conduttore negativo, ora furono quasi inverse, cioè la carta si tinse in verde sotto il conduttore positivo, e restò quasi inalterata sotto il negativo, questa sperienza confermando che il positivo, ed il negativo non differiscono, che nel più, e nel meno; giacchè ebbi il verde dal positivo debolissimo, ciò è un nuovo argomento

Acido nitrico	Ammoniaca
Giallo chiaro	Sbiadito tendente al violaceo
Giallo rosa	Biggio
Rosso vivace	Piccolissima variazione
Tinta cerulea	Biggio giallognolo
nta violaceo-cerulea	Verde più intenso all' intorno
nta violacea	Sbiadito
ggio e color di rosa	Sbiadito con contorno giallo intenso
io chiaro sparso di nte di giallo oscu- , e verde	Nessuna variazione
Giallo chiaro	Ceruleo più intenso
Azzurro	Sbiadito
è ancor più chiaro	Nessuna variazione
iolaceo con macchia	Menomissima variazione

Colore	Effetti del fluido positivo	Effetti del fluido negativo	Acido nitrico	Ammoniaca
Rosso di cocciniglia	Nessuna variazione	Violaceo	Giallo chiaro	Sbiadito tendente al violaceo
Tintura acquea di Tornasole	Color di ferro	Rosso, e Biggio nel centro	Giallo rosa	Biggio
Bleu vegetabile	Verde	Caffè oscuro	Rosso vivace	Piccolissima variazione
Verde vegetabile	Biggio oscuro	Biggio chiaro con macchia oscura nel centro	Tinta cerulea	Biggio giallognolo
Verde arseniato di rame	Verde sbiadito	Biggio con macchia violacea nel centro	Tinta violaceo-cerulea	Verde più intenso all' intorno
Giallo muriato di piombo	Poco sbiadito	Tinta oscura con macchia Caffè nel centro	Tinta violacea	Sbiadito
Giallo detto Graine de Avignon	Sbiadito con punti neri	Macchia azzurra violacea	Biggio e color di rosa	Sbiadito con contorno giallo intenso
Arancio ossido di piombo	Biggio di ferro intenso	Biggio chiaro con macchia nera nel centro	Biggio chiaro sparso di tinte di giallo oscuro, e verde	Nessuna variazione
Celeste chiaro carbonato di rame, tinto in bleu dal muriato d' ammoniaca	Alquanto sbiadito	Macchie gialle, intenso, e Caffe	Giallo chiaro	Ceruleo più intenso
Biggio ceruleo prussiato di ferro con gesso	Color d' argento	Ceruleo intenso, e color bruno	Azzurro	Sbiadito
Caffè ossido di ferro con alquanto di Campeccio	Biggio chiaro	Caffe chiaro con macchia cerulea nel centro	Caffe ancor più chiaro	Nessuna variazione
Panno azzurro	Biggio chiaro	Biggio chiaro	Rosa-violaceo con macchia gialla nel centro	Menomissima variazione

to di sperar molte scoperte utili applicando a queste ricerche . Indicherò un saggio degli effetti comparativi del fluido galvanico positivo, e negativo, dell'acido nitrico, e dell'ammoniaca sopra diversi colori animali, vegetabili, e minerali fissati sopra la carta .

Le esperienze sul panno dimostrano, che il fluido galvanico tanto positivo, che negativo distruggendo il colore lascia un deposito polveroso, che probabilmente può indicare il mordente col quale fu fissato il colore, nel qual caso grandissimo sarebbe l'uso del fluido dell' elettro-motore per investigare diverse maniere di tingere .

Le mie occupazioni non mi permisero di dare a queste ricerche ed alle altre sul fluido galvanico il tempo necessario per esaminare in tutta l' estensione un soggetto, sul quale fin ora non abbiamo che fatti disparati esposti dai loro autori con diverse viste; Io continuo a consecrarvi i momenti liberi che posso avere, e spero che altri raccogliendo tutti i fatti, esaminandoli senza prevenzione per esporli nel vero loro valore, accrescerà la scienza di un trattato che universalmente si desidera .

SULL' ARIETE IDRAULICO

MEMORIA

Di Ermenegildo Pini

e di

Giuseppe Maria Ragagni

Ricevuta il dì 8 Aprile 1803.

1. Quanto il valente *Mongolfier* sorprese già il Mondo tutto col suo pallone aerostatico, altrettanto solleticò da qualche anno la curiosità de' Fisici con quella Macchina, che chiamasi *Ariete Idraulico* (*Béliér hydraulique*), siccome quella che presenta un effetto, il quale a prima giunta non pare, che possa spiegarsi con le note leggi idrauliche; e altronde sembra poter avere una vantaggiosa applicazione per gli usi della vita umana. Tale effetto è di far ascendere l'acqua ad una altezza molto maggiore di quella, che ha nel riservatojo, senza che v' intervenga l' azione continua di una forza, o potenza estranea.

2. Una di quelle macchine, che il Professore Pini provvide a Parigi dallo stesso *Mongolfier*, ci ha dato campo di osservare quell' effetto massimamente in più occasioni, nelle quali abbiamo anche dovuto mostrarlo per soddisfare l' altrui curiosità; e vedendo l' interesse che vi pigliavano, e sentendo ancora i varj giudizj, che ne portavano molte persone assai delle cose Fisiche intelligenti, ci siamo determinati a metterla in attività per instituire una serie di ricerche diret-

rette al doppio fine di trovarne la spiegazione, e di vedere a quali usi si potesse con vantaggio applicare. Sono queste il soggetto di questa Memoria, che pubblichiamo non tanto per palesare la nostra opinione, qualunque essa sia, quanto per far conoscere in Italia quella ingegnosa macchina, che bene lo merita, e sappiamo essere da alcuno desiderata.

3. Da principio però non vogliamo tralasciare di dire, che per meglio fissare le leggi, alle quali gli effetti, e gli usi di quell' ariete sono sottoposti, sarebbe abbisognato di esperimentarne non un solo ma molti diversi, e in circostanze assai più variate, che noi non abbiamo avuto il comodo di fare; ma questo potrà essere l'oggetto di un altro lavoro, che noi forse intraprenderemo sulle nostre, e le altrui osservazioni; e allora potremo pure esporre, e più sicuramente con le esperienze stesse paragonare le formole analitiche, con le quali abbiamo già tentato di sottoporre al calcolo tutti li fenomeni dell' ariete; imperocchè per rendere questa Memoria meno lunga, e più facile, e in qualche modo soddisfare insieme agli amatori dell' idraulica matematica, per ora abbiamo solamente indicati gli autori, che hanno esposte le teorie che a quelle formole conducono, e le difficoltà ancora, che si incontrano per applicarle all' ariete.

4. La figura 1. rappresenta la sezione verticale dell'Ariete; e questo si può intendere composto di due parti una superiore LZL', l' altra inferiore ALL'B, divise da un diafragma solido LL', che forma il fondo della prima, e il coperchio della seconda. Quella consiste nella campana LZL' simile a quella di una fontana di compressione, e non comunica con l' atmosfera se non per mezzo del tubo YZO, che vicino al fondo LL' si apre nel foro Y, e sortendo dalla sommità Z della campana termina nel foro O, al quale si applica uno spillo, o un altro tubo.

5. La parte inferiore ALL'B è una camera cilindrica, che nel suo fondo AB ha applicata una valvola MG, che si apre da una molla spirale I di sotto in sù. Per fine del diafrag-

fragma LL′ sono due valvole minori H, H′, che si chiudono pel proprio peso, e per le quali sole, quando sono aperte, comunicano insieme le interiori capacità della campana, e della camera.

6. Nella macchina di *Mongolfier* che noi avevamo alle mani, il solo fondo AB è con vite unito alle pareti della camera così fortemente, che basti per impedire ogni passaggio all' acqua, e all' aria; ma per dimostrarne la costruzione, e per riconoscere e ripararne i difetti, si può saldare il diafragma LL′ superiormente alle pareti della camera, e poi con le viti conviene in quel modo unire tanto la camera con la campana, quanto con questa in Z il tubo ZY, facendolo al fondo Y entrare in qualche registro per tenerlo diritto; e anche sotto alla valvola MEG conviene applicare un galetto M, o altro mezzo per regolarne l' apertura conforme al bisogno.

7. La camera che con la campana forma il corpo della macchina, ha da un lato una apertura circolare RR, in cui si introduce un tubo di condotta R′R′D′D′ (fig. 4) il quale si unisce con un altro DDFFG (fig. 5), che è piegato in E, e salendo per EF in FG entra nel riservatojo KI, in cui si mantiene l' acqua, che dee passare nel corpo della macchina. Nel nostro ariete in GF è un turacciolo, che serve ad aprire, o togliere la comunicazione tra questo riservatojo, e il tubo. Ma sarà meglio applicarvi una chiave pneumatica all' istesso uso.

8. Le dimensioni delle descritte parti si possono conoscere dalla scala annessa alla Tav. I; ma non sono esse precisamente necessarie, perchè si possono ancora costruire con altre proporzioni, purchè si mantengano certe condizioni, che saranno abbasso stabilite. In generale la grandezza di quelle parti dipende massimamente dalla quantità, e forza dell' acqua, che si può fornire al riservatojo; e secondo le circostanze di questa dovrà sempre essere determinata almeno esperimentalmente.

9. Anche la posizione della valvola MG potrebbe essere diversa, poichè il *Montucla* (hist. des Math. vol. 2.) descrive la macchina, che fu forse la prima proposta da *Mongolfier;* e quella ha la camera ABCD (fig. 8) rettangola, e la valvola RR′ verticale, e opposta al tubo di condotta MNPO, e appoggiata a due sostegni SS′, TT′, sui quali è mobile l'asse LU, contro al quale preme la molla E, allora quando la valvola è chiusa. Parimenti potrebbe questa essere situata nella parte superiore del tubo di condotta fuori della camera, come in A (fig. 7), che chiudendosi pel proprio peso non abbisognerebbe di molla; ma i fenomeni sarebbero sempre gli stessi, e avrebbero una stessa spiegazione; onde noi riguarderemo la costruzione della fig. 1. che avevamo alle mani.

10. Per mettere questa macchina in giuoco, si tiene chiusa la valvola MG con la mano, o con un peso bastante a vincere la forza della molla I; e aprendo la comunicazione tra il riservatojo e il tubo, (7) l' acqua scorre dal riservatojo pel tubo nella camera, entra per le valvolette H, H′, e si alza nella campana, e sortendo dal foro O si slancia oltre al livello del riservatojo, ma in brevissimo tempo si riduce a formare un getto un pò più basso di quel livello, o sale solamente fino a questo livello secondochè quel foro è munito di uno spillo, o di un tubo; e in questa altezza seguita a mantenersi, quantunque si rimova la mano o il peso, che tiene chiusa la valvola.

11. Ma se questa si apra ad arte, e si lasci libera, all' istante si rallenta moltissimo, e quasi del tutto cessa l'uscita dell' acqua per O, la quale in vece sorte cadendo per l'apertura lasciata dalla valvola; ma dopo un breve tempo si chiude questa valvola da se, e a misura che scema, e finalmente cessa l' uscita dell' acqua da questa, cresce in vece l' uscita da O con impeto sempre maggiore, che diviene massimo nel tempo stesso, in cui la valvola si chiude, e

che di nuovo porta l' acqua nel getto, o nel tubo oltre al livello del riservatojo.

12. Quindi dopo un breve intervallo la valvola nuovamente si apre da se, e a misura che cresce l' uscita dell' acqua per la sua apertura, si rallenta l' uscita per O; ma appresso dopo un breve tempo quella valvola si chiude da se, e mentre scema, e cessa l' uscita dell' acqua per la di lei apertura, cresce all' opposto e diviene massimo l' impeto dell' acqua, che sorte per O, e ancora nel getto o nel tubo sale oltre al livello del riservatojo.

13. Così continua alternandosi l' aprimento, e il chiudimento della valvola, l' uscita, e l' arresto dell' acqua per la di lei apertura, il decremento, e l' accrescimento dell' impeto, con cui l' acqua sorte da O; e se la campana sia trasparente, si vede che essa non si riempie d' acqua, che fino ad una certa altezza sopra il foro Y, oltre a cui rimane piena d' aria; e che al tempo stesso sensibilmente, in cui si chiude la valvola MG, si aprono le valvolette H, H', le quali appresso si chiudono, dopo che una porzione d' acqua è passata dalla camera nella campana per sortire dal foro O.

14. Mentre si chiude la valvola MG, odesi il colpo rumoroso, che essa fa battendo sul piano a cui è appoggiata; ma al tempo stesso in cui quella si chiude, si vede che tutto l' apparato della macchina è scosso, e si muove secondo la direzione dell' acqua nel tubo di condotta; e poi, aprendosi quella valvola, ritorna indietro; e nei moti alternativi, che conforme all' esposizione fatta accadono nelle valvole, nell' acqua, e in tutto l' ariete consiste il di lui giuoco; intorno al quale senza entrare in maggiore dettaglio noi diremo, che il moto della valvola MG diviene meno celere, e cresce l' altezza a cui l' acqua sale, e insieme il prodotto di quell' altezza nella quantità d' acqua, che si raccoglie in un dato tempo, quando si rende maggiore l' altezza dell' acqua nel riservatojo, o la lunghezza del tubo di condotta almeno fino al limite delle nostre esperienze, nelle

quali essendo l'acqua nel riservatojo alta pollici 22, la massima lunghezza del tubo di condotta fu di pollici 119, e 2 linee.

15. Ma qui è pure da notare, che se l' acqua si lascia dall' apertura inferiore sortire liberamente nell' aria, questa almeno nel nostro ariete sempre si insinuava nella camera, e mista con altr' acqua entrando per le valvolette nella campana, e sortendo dal foro O ne rendeva l' efflusso quasi interrotto, e divideva, e sparpagliava il getto per modo, che difficilmente si poteva raccogliere; quindi nelle nostre esperienze noi abbiamo quasi sempre usato l' artifizio di far pescare la valvola MG in un altro vaso pien d' acqua; onde, impedito l' ingresso dell' aria, l' efflusso dell' acqua per O riusciva più unito, e regolare, e sebbene per questo il moto di quella valvola si rendesse un poco più celere, pure il prodotto della quantità d' acqua fornita dall' ariete nell' altezza a cui sale, sembrava anzi divenire un pò maggiore.

16. Ora per giugnere a trovare la spiegazione dei fenomeni esposti, abbiamo fatto primamente costruire una camera cubica di latta poco più grande della FABGF disegnata nella fig. 6, in uno de' cui piani laterali era un tubo I per introdurvi l' altro di condotta RD (fig. 4) come si fa nel corpo dell' ariete (7); e nel piano superiore era un altro tubo YXV (fig. 6), il cui coperchio YZ aveva un piccol foro M; al piano inferiore era saldato un altro tubo L, che aveva un diametro eguale a quello del tubo di condotta, ed era libero intieramente.

17. Avendo applicato questo stromento al tubo di condotta quasi orizzontale, onde i tubi YXV e L riescivano quasi verticali, lasciammo libera l' acqua del riservatojo e osservammo, che se con un coscinetto regolato a mano tenevasi chiuso l' orifizio del tubo L, l' acqua usciva pel foro M, e formava un getto che da principio si alzava un poco oltre al livello del riservatojo, ma prestissimo si abbassava di poco sotto a questo livello; se poi rimovendo il coscinetto si lasciava libero l' orifizio del tubo L, tosto cessava l' uscita

per

per M dell' acqua, che tutta in vece si scaricava pel tubo L; ma se allora questo tubo rapidamente si chiudeva con l' indicato coscinetto, cessando l' efflusso per L si rinovava il getto pel foro M, che ascendeva assai oltre il livello del riservatojo.

18 Così seguitando ad aprire e chiudere a mano il tubo L, proseguiva l'efflusso per L, e il getto per M intermittente e alternativo, cessando uno quando incominciava l' altro, cosicchè sempre cominciava il getto, quando il tubo L si chiudeva; e quì pure dentro i limiti delle nostre esperienze (14) accade, che il getto cresca, quando cresce l' altezza dell' acqua nel riservatojo, o la lunghezza del tubo di condotta; ma inoltre per avere la massima altezza del getto, conviene lasciare un certo intervallo di tempo tra li chiudimenti successivi del tubo L; poichè se questi siano troppo celeri, il getto rimane sempre un poco più basso.

19. Somiglianti fenomeni ci accadde pure di osservare in un altro modo; poichè volendo provare gli effetti, che dall' ingrandimento della camera, o del tubo di condotta potevano provenire, con quattro assicelle insieme unite senza grande precisione si preparò un tubo prismatico lungo tre piedi, la di cui sezione era di pollici quadrati 25, e avendo insinuato una delle sue estremità in un grande recipiente, all' altra si applicò una camera cubica parimenti di legno, che nella superficie superiore aveva un foro, e sul suo fondo un coscinetto a guisa di valvola mosso a mano, avendo quì pure lasciato, che l'acqua dal recipiente scorresse pel tubo nella camera, tenendo chiusa l'apertura della superficie inferiore, l' acqua sortendo al solito dalla superiore arrivava quasi al livello del recipiente, prescindendo dalle poche prime gocce, che lo sorpassarono; lasciando poi libera l' apertura inferiore, sgorgavane l' acqua senzachè quasi ne uscisse goccia dalla superiore, e ancora dalle commessure non troppo esattamente connesse; ma al momento in cui si chiude-

va l' apertura inferiore, tosto il solito getto saliva dalla superiore oltre al livello del recipiente.

20. Egli è chiaro, che questi esperimenti (16, 19) presentano una esatta imitazione dei primi fenomeni (10, 11, e 12) dell' ariete, e si possono chiamare analitici, perchè ci forniscono un' analisi tanto sensibile di quella macchina, che quasi ne fanno svanire il meraviglioso; quindi noi chiameremo stromenti di paragone quelle camere di legno (19) e di latta (16), perchè infatti si vede, che per riguardo a quei primi fenomeni ciascuno di questi stromenti è un abbozzo di un ariete, in cui il coscinetto fa le veci della valvola, e la mano fa le veci della molla che l' apre e la chiude; e a compiere l' ariete, basterebbe che alla parte superiore di questi stromenti si adattasse una valvola I (fig. 9), o due, che facessero l' uffizio di sostenere l' acqua, che nei getti successivamente si inalza, e inoltre una campana XEY, che la contenesse, e la tramandasse pel foro E munito di uno spillo, o di un tubo.

21. In questa forma d' ariete, che ciascuno può ottenere facilmente togliendo all' altro (4) il tubo ZY (fig. 1), il getto, o il moto dell' acqua sortendo da E (fig. 9) riesce intermittente, e segue solo ogni volta che si chiude la valvola M, come accade nelli Istromenti stessi di paragone (17, 19). Ma l' ariete in quella forma si potrebbe chiamare semplice in riguardo dell' altro (4), che essendo munito del tubo YZ (fig. 1) è più composto, e ancora potrebbe utilmente servire in tutti i casi, dove non si richiede che la salita dell' acqua sia continua.

22. Dalle esposte cose possono dedursi più conseguenze; e la prima è, che la cagione per cui il getto fatto dall' ariete ascende oltre al livello del riservatojo (11), non è l' urto che la valvola MG aprendosi può dare contro l' acqua, che le sovrasta; poichè in questo caso la massima altezza, e il massimo impeto si avrebbe, mentre quella valvola si apre;

e in vece non solo sottoponendo la mano alla valvola stessa nell' ariete si sente, ma molto più chiaramente nelli stromenti di paragone (17, 19) si vede che quell' impeto e quell' altezza succedono, mentre l' apertura inferiore si chiude, sebbene in quelli stromenti ciò si facesse in modo, che l' acqua sgorgante tagliavasi orizzontalmente, onde quella che rimaneva nella camera, dovesse sentire nissun urto, o solamente un urto leggerissimo.

23. La seconda conseguenza, che si può dedurre, è, che l' aria che occupa la parte superiore (13) della campana LZL' non è la causa efficiente del giuoco dell' ariete, poichè questo negli stromenti di paragone (17, 19) e nell' ariete semplice (21) succede senza quell' aria. E veramente ancora l' ariete composto, prima di metterlo in giuoco, si può riempire d' acqua intieramente, e basta per questo, che tengasi capo volto all' ingiù, mentre si apre la comunicazione col riservatojo, e poi si rimetta nella posizione verticale. Ora anche in quel caso l' ariete giuoca, e solamente il getto o l' efflusso per O è intermittente, e segue ogni volta che si chiude la valvola.

24. E egli è bensì vero, che nel modo ordinario di usare dell' ariete, di continuo insieme all' acqua per le valvolette nella campana entra dell' aria (15), che occupandone la parte superiore, rende prontamente continua l' uscita dell' acqua per O; ma nemmeno a quell' aria si può il giuoco dell' ariete attribuire, poichè quella massime da principio è pochissima; oltre di che come abbiamo detto (15), quel giuoco continua ancora, quando all' ariete si sottoponga un altro vase pieno d' acqua in cui peschi la valvola del fondo in modo, che l' ingresso dell' aria nella campana sia quasi intieramente impedito.

25. L' aria dunque, che è contenuta nella parte superiore della campana LZL' (13), non è la cagione efficiente del giuoco dell' ariete, ma solo modifica il moto dell' acqua che esce per O, rendendolo continuo; e sarà una circostan-

za da spiegarsi, come da quell' aria nasca questa continuità del moto dell' acqua; ma i fenomeni dell' ariete si dovranno spiegare supponendo, che la campana sia priva d' aria, e rimanga costantemente piena d' acqua.

26. La camera e il tubo di legno, che abbiamo descritti (19), ci hanno mostrato un fenomeno, che serve singolarmente alla spiegazione di quelli dell' ariete; imperocchè mentre si chiudeva l' apertura inferiore, comparivano non solo il solito getto dalla superiore, ma ancora altri vigorosi sprizzi, che a guisa di getti sortivano da tutte le commessure, che i loro lati non abbastanza bene connessi lasciavano aperte. Per determinare ancora nell' altra camera (16) e nell' ariete i fenomeni, che a questo potessero essere analoghi, abbiamo aperti i piccoli fori *a* (fig. 4) nel tubo di condotta, *i* (fig. 5) nel tubo discendente, *t* (fig. 1) nella parte della camera opposta al tubo di condotta.

27. Quindi parimente lasciando quei fori nudi con la camera di latta osservammo, che da questi come (16) dal foro M (fig. 6) niuna, o pochissima acqua usciva, mentre l' apertura inferiore era aperta, ed al contrario ne usciva un forte getto maggiore di quello, che avrebbe cagionato la sola pressione dell' acqua, mentre quell' apertura si chiudeva, e con l' ariete osservammo, che mentre la valvola MG (fig. 1) era aperta, l' efflusso dell' acqua da quei fori era sempre assai tenue, e sicuramente minore della pressione, ma si riduceva ad un getto molto maggiore di questa, quando quella valvola si chiudeva, cosicchè lasciando giuocare l' ariete, ciascuno di quei fori dava un getto intermittente maggiore di quello, che la pressione dell' acqua del riservatojo avrebbe potuto produrre.

28. Quando poi applicammo al foro *a* (fig. 1) un tubo di vetro *a b*, e al foro *i* (fig. 5), il sifone *igm* rivolto in su, viddimo sempre, che se l' apertura inferiore era libera, l' altezza dell' acqua in quelli era pressochè niuna usando la camera di latta, e molto minore di quella del riservatojo

usando l' ariete; ma in ambedue le macchine quell' altezza diveniva assai maggiore di questa, tostochè quell' apertura si chiudeva, onde lasciando giuocare l' ariete si formavano in que' tubi delle ondulazioni, e dei forti sprizzi tutte le volte, che la di lui valvola si chiudeva.

29. A somiglianza di questo ci accadde pure di osservare, che l' acqua, se mantengasi non nel riservatojo ma nel solo tubo discendente, alternativamente si abbassa, finchè l' apertura inferiore nella camera di latta, o nell' ariete resta libera, ma chiudendosi questa, si alza rigurgitando, e getta in alto sprizzi impetuosi; onde si deve giudicare, che questo rigurgito dell' acqua, ogni volta che l' apertura inferiore si chiude, succeda pure, quando si mantiene essa nel riservatojo, o si usa il recipiente per la camera di legno; ma che in questi casi quel rigurgito non sia sensibile, perchè l' acqua che sale, trova un vasto spazio dove si dilata.

30. Dagli esposti fenomeni si intende facilmente, come alla descritta macchina convenga il nome d' Ariete; poichè il moto, ossia dell' acqua che dentro al tubo cade, e rigurgita, (29) ossia del tubo che si avanza, e retrocede (14), accompagnato dal colpo rumoroso, che fa la valvola, battendo sul piano, imita precisamente il moto, che fa l' ariete militare per urtare contro dei corpi, o che fanno gli animali chiamati Arieti, quando si battono tra loro.

31. Venendo ora alla spiegazione dei fenomeni tanto dell' ariete, quanto degli stromenti di paragone, non si può dubitare, che alcuni dipendano dalle note leggi della pressione dei fluidi, quando sono o si possono considerare come stagnanti, e tale è il moto per cui, finchè l' apertura inferiore resta chiusa, l' acqua sortendo dalla superiore (10, 17, e 19), o da qualche altro foro si mantiene al livello, o un pò di sotto al livello del riservatojo, poichè quel moto corrisponde intieramente a quello, che si ottiene coi sifoni, purchè nel caso dell' ariete si computi lo sfregamento, che l' acqua

soffre passando pel tubo YZ ; e ancora in questo caso da quelle leggi si intende, come quel moto continui istessamente (10), e la valvola MG rimanga chiusa, ancora quando si ritira la mano, o il peso che vi era attaccato ; imperocchè nel nostro ariete la pressione dell' acqua, che allora sovrasta a quella valvola, è maggiore della forza della molla, che tende a sollevarla.

32. Quando poi la valvola è aperta (11), l' acqua cade, e si move dentro i tubi, e sorte da quella apertura con la velocità, che è determinata dalla pressione dell' acqua sovrastante modificata dalle resistenze, che soffre nel tubo ; e i fenomeni che allora seguono nell' ariete, e gli altri analoghi, che seguono nelli stromenti di paragone, finchè la loro apertura inferiore è libera, dipendono dalle leggi della pressione, che esercita l' acqua, quando è in moto. Di queste già si occuparono gli Scrittori d' Idraulica *Daniele Bernoulli* (Nou. Comm. Petrop. V. 11, e IV, hydr. sect. XII) *Giovanni* di lui padre (hydr. op. V. IV) *D'Alembert* (Tr. de l' Eq. ec. l. 11. ch. 11.) e altri, dai quali presero almeno le principali leggi *Bossut* (hydr. 11. part. ch. VI. sect. 11), e *Prony* (hydr. §. 857, e seg.). Ma l' egregio socio *Gregorio Fontana* nella Memoria sopra la pressione dell' acqua in moto contro i vasi e tubi pe' quali scorre, inserita nel vol. IX. della nostra Società ha trattato quel soggetto medesimo con la precisione e chiarezza, che in tutte le di lui opere si ammira, e non lascia più altro a desiderare.

33. E veramente da quelle leggi segue in primo luogo, che la pressione contro i lati dei tubi è nulla, se l' acqua vi scorre liberamente, e sorte da un' apertura proporzionata ; quindi nelli Istromenti di paragone, finchè l' apertura inferiore resta libera, e presenta un libero sfogo all' acqua, l' uscita di questa dall' apertura superiore (17), e dagli altri fori nudi (27), o muniti di tubi (28) è nulla, o assolutamente tenuissima che proviene da qualche ritardo, che soffre l' acqua per le piegature, e per lo sfregamento dei tubi, come av-

verte *Daniele Bernoulli* (nou. comm. Petr. V. IV) .

34. Appresso segue da quelle leggi, che l'acqua se non sorte dai tubi per una conveniente apertura, in proporzione dell' impedimento che soffre, esercita una pressione laterale, che sempre è minore dell' altra che produrrebbe, se sotto all' altezza medesima fosse stagnante. Ma nell' ariete appunto accade, che l'apertura inferiore, sebbene la valvola sia alzata, non presenta all' acqua un libero sfogo, il che è chiaro per se, e ciascuno potrà anche assicurarsene raccogliendo, e paragonando la quantità d' acqua, che in tempi, e circostanze eguali sortono dal tubo libero, e dalla sola apertura della valvola; quindi nell' ariete, finchè questa valvola resta aperta, qualche porzione d' acqua, ma sempre minore di quella, che alla pressione dell' acqua stagnante potrebbe corrispondere, si vede sortire dai fori laterali (27, 28) e anche dall' apertura superiore (11), se pure in questa non sia del tutto impedita dalle resistenze delle valvolette, e del tubo YZ.

35. Ad ogni modo è pur chiaro, che quando la valvola MG è aperta, tanto quelle valvolette, quanto questa valvola stessa dall' acqua, che scorre per sortire dalla di lei apertura, soffrono qualche pressione. Ora questa per necessaria condizione di costruzione deve esser tale, che basti per incominciare ad abbassare quella valvola MG per chiuderla vincendo la forza della sottoposta molla, e senza di ciò il giuoco dell' ariete non potrebbe cominciare, e proseguire.

36. Nondimeno troverebbe non poca difficoltà chi si accingesse a mostrare, che il moto dell' acqua pei tubi, o per l' apertura della valvola, e gli indicati fenomeni dell' ariete corrispondono alle formole, con le quali gli Scrittori d' Idraulica hanno espresso quel moto dell' acqua, o la pressione, che essa esercita essendo in moto, siccome per riguardo a questa ha fatto *Daniele Bernoulli* (l. c.) co' suoi esperimenti; poichè quelle formole suppongono nota la proporzione tra l' apertura libera, e la impedita, e *Bernoulli* poteva tro-

varla, perchè operava con aperture semplici e regolari; ma nell' ariete come calcolare l' apertura, che lasciano le valvole massime avendo riguardo, che nella valvola del fondo l' acqua esce con più libertà dalla di lei parte anteriore, che dalla posteriore? Quindi potrà forse sembrare migliore il consiglio di valersi di quelle formole per determinare l' apertura massimamente della valvola per mezzo della quantità d' acqua, che ne sorte in un dato tempo, o del moto, con cui per la sua pressione sorte dai fori nudi, o muniti di tubi (27, 28); e poi di quella apertura si potrà valersi ad altri usi.

37. Ma questo metodo non potrà sempre con ogni sicurezza usarsi per trovare la pressione, che soffre la valvola MG quando è aperta, perchè siccome l' acqua discendendo accorre da ogni parte per uscire, così quella valvola dee ben riceverne ancora qualche percossa, come indica Giovanni Bernoulli (*Op. V. IV. p.* 46.), e noi diremo in seguito; e poi se quella valvola pesca nell' acqua (15), conviene modificare quelle formole risguardando l' ariete a guisa di un vaso immerso in un altro, di che trattano *Daniele Bernoulli* (hydr. sect. VII.), *D'Alembert* (Tr. &c. l. 11. ch. II.), e altri. Se poi quella valvola è libera, conviene ancora modificare quelle formole dipendentemente dalla pressione dell' aria, poichè l' acqua che cade con impeto, formando sotto alla valvola quasi un cilindro ripieno d' aria, secondo le osservazioni degli Autori citati, e del *Venturi* nell' eccellente opuscolo sul moto laterale dei fluidi, imprime a questa un moto laterale per cui traendola seco non lascia, che possa tutta la sua pressione esercitare contro all' esteriore superficie di quella valvola.

38. Finalmente tra i fenomeni descritti alcuni dipendono dall' azione, che esercitano i fluidi in moto, quando vengono arrestati. A noi niun Scrittore d' Idrodinamica è sovvenuto, che ne abbia date le leggi distintamente, e soltanto ci è sembrato, che con questo caso qualcbe analogia avesse

quel-

quello dei fluidi contenuti in vasi, che sono mossi, o esternamente percossi, di cui tratta *Daniele Bernoulli* (hydr. sect. XI) seguito dal *D' Alembert* (l. c.), e in parte dal *Bossut* (hydr. p. II. sect. III.). Forse gli Scrittori d'Idraulica non hanno di quella azione trattato separatamente, perchè han creduto, che dipenda dalle stesse leggi della percossa; siccome però ogni azione dei fluidi si riduce a pressione, pare che per riguardo all' ariete, e agli altri casi analoghi l' azione dell' acqua arrestata possa facilmente intendersi ancora, e determinarsi nel seguente modo. E da principio suppongasi il moto ridotto a stato permanente, e la massa dell' acqua divisa in tali strati, nei quali siano le velocità reciprocamente proporzionali alle loro aree, e se sia data la proporzione tra queste, e l' area dell' apertura della valvola, si potrà nell' ariete trovare la velocità in ciascuno di quei strati, determinando la velocità in quella apertura non solo dalla pressione calcolata fino all' altezza del riservatojo, ma ancora dal ritardamento, che l' acqua soffre per le resistenze nel tubo di condotta.

39. Conoscendo poi la velocità in tutti li strati si potrà pure trovare l' impeto, con cui l' acqua, che per la propria inerzia tende a moversi con l'acquistata velocità, opera contro qualunque strato, o contro qualunque parte di uno strato che la precede, e da cui viene arrestata, non altrimenti che si trova la pressione, che l' acqua stagnante esercita contro un ostacolo che la impedisce dal cadere. Quell' impeto si può chiamare momento, perchè dipende dalla massa insieme, e dalla velocità, sebbene non sempre corrisponda a tutta la massa; e facilmente si troverà, che quel momento crescerà sempre crescendo l' altezza dell' acqua nel riservatojo, e crescerà ancora crescendo la lunghezza del tubo di condotta fino ad un certo limite, oltre al quale diminuirà per ragione del decremento di velocità, che questo tubo produce all' uscita dalla valvola (38); inoltre quel momento sarà maggiore nei luoghi, che sono più vicini alla valvola, e

in qualunque luogo non potrà mai non restare costante, se restino medesime le circostanze, e non essere maggiore della sola pressione che l'acqua produrrebbe, se fosse stagnante.

40. Ora a noi pare evidente che nell' acqua, che era in moto, e viene arrestata, ciascun strato siccome soffre, così per ragione della fluidità debba in ogni direzione esercitare una pressione eguale a quell' impeto, o momento; onde in tutte le direzioni, dove si trovi una resistenza minore, dovrà seguirne il moto, che corrisponda all' eccesso di quel momento sopra questa resistenza; quindi se i lati abbiano qualche foro, l' acqua ne uscirà con impeto eguale a quel momento, ed in ogni caso l'acqua dovrà soffrire un rigurgito, ossia moversi contro alla precedente direzione, e retrocedere dentro del tubo, poichè quando l' acqua ha finito il suo moto, la resistenza secondo quella direzione può solo corrispondere alla pressione, che l' acqua arrestata produrrebbe essendo stagnante, laonde si trova minore del momento (39).

41. Se noi conforme agli esperimenti di *Canton* (Trans. Phil. V. L. iv.), di *Abich*, e *Zimmerman* (Veber die elast. des Wassers) volessimo riguardare l' acqua come compressibile; e sebbene poco compressibile, come sommamente elastica, potremmo con facilità dimostrare la verità, e dar la ragione degli esposti principj; imperocchè allora è manifesto che nell' acqua, mentre è arrestata, ciascuno strato in ragion di quel momento (38) dell' acqua che lo insegue, cede e viene compresso, e per la propria elasticità tende a rilasciarsi secondo ogni direzione, e realmente si rilascia in tutte le direzioni, dove trovi una resistenza minore, e perciò realmente si rilascia sempre nella direzione contraria al moto precedente, dove l' acqua, consumato avendo il momento nel produrre la compressione, esercita una pressione minore dell' elasticità. Ma niuno ci vorrà contendere, che noi di quella immagine ci serviamo almeno per dichiarare, come quei principj seguano dall' indole stessa dell' impeto, che l' ac-

l' acqua arrestata tendendo a moversi per la propria inerzia esercita contro allo strato, che la impedisce; imperocchè *Giovanni Bernoulli* (cap. V. IV. p. 443.) ha già ottimamente avvertito, che qualunque forza applicata ai fluidi si deve come un' aura elastica considerare.

42. Adunque la pressione dell' acqua, che essendo in moto resta fermata, è la cagione che produce gli sprizzi e i getti, che si osservano generalmente, quando si apre la comunicazione col riservatojo (10, 17, 19), o che negli stromenti di paragone accadono per l' apertura superiore (17, 19,) e pei fori laterali (26, 27, 28), quando si chiude l' apertura inferiore col coscinetto. Nell' ariete poi a misura, che si chiude la valvola MG (35), e una maggiore copia d' acqua viene arrestata, cresce ancora la di lei pressione in ogni direzione, onde con moto accelerato quella valvola si abbassa e chiude, e si aprono le valvolette H, H', che per costruzione debbono resister meno di quella pressione, e l' acqua passa dalla camera, nella campana, e sorte dagli altri fori *t*, *a*, *h*, (28, 29) con impeto, che va sempre crescendo, e diviene massimo nell' atto stesso, in cui la valvola è chiusa; quindi in tutti quei casi, l' impeto dell' acqua, che si mette in moto (14, 18) corrisponde al momento di quella, che è arrestata (39), e perciò il getto è sempre maggiore della pressione, che quest' acqua essendo stagnante potrebbe produrre, e cresce crescendo non solo l' altezza dell' acqua nel riservatojo, ma ancora la lunghezza del tubo di condotta almeno dentro i limiti delle nostre esperienze (14).

43. Similmente dalla pressione dell' acqua arrestata proviene il rigurgito, che al chiudersi dell' apertura inferiore si osserva tanto nelli stromenti di paragone, quanto nell' ariete (30). E qui noi avvertiremo, che per una somigliante cagione ancora nelle chiuse, quando si serran i portoni, e vicino alle tortuose ripe, contro le quali urtano i fiumi, e nei tubi di ogni sorte, quando con chiavi, o altro mezzo si

chiudono, si vede l'acqua alzarsi, e retrocedere sempre con impeto, che è sempre maggiore della semplice pressione, e corrisponde all' impeto dell' acqua, che è arrestata. Quindi per ispiegarsi quel rigurgito, e gli altri fenomeni posti al num. 42. non è d' uopo ricorrere alla elasticità delle parti metalliche, onde sono le macchine composte; e infatti noi non ci siamo accorti di alcuna variazione nei fenomeni dell' ariete, quando abbiamo vestita interiormente la camera di spugna, che ci è sembrata il corpo più atto ad introdurre una differenza più notabile di elasticità.

44. L'impeto con cui la valvola MG chiudendosi batte sul piano sottoposto, forma il colpo rumoroso (14), il quale, se paresse molesto, si può togliere, o diminuire moltissimo vestendo quel piano di una pelle a guisa di coscinetto. Anche quel colpo imprime a tutto l' ariete un moto all' ingiù, che non si deve confondere con l' altro assai più vigoroso (14), che imita quello dell' ariete militare. Questo sembra a noi, che provenga dalla reazione del rigurgito, o piuttosto perchè la stessa pressione, per cui l' acqua retrocede verso il riservatojo, spinge ancora le opposte pareti della camera, e insieme nel corpo tutto della macchina le fa movere in parte contraria non altrimenti, che l' azione stessa del fluido elastico svolto dalla polvere produce il getto delle palle, e la rinculata dei cannoni, l'ascesa dei razzi, e l' efflusso di sotto della materia accesa, anzi l' azione stessa dell' acqua produce il getto, e la rinculata dei vasi liberi, sopra di che sono da vedere *Daniele Bernoulli* (hydr. sect. XIII.) *D' Alembert* (Tr. etc. L III. ch. 1.) e altri; quindi pare, che la reazione dell' acqua, che passa dalla camera nella campana, debba in somigliante modo accrescere quel moto dell' ariete in giù; nondimeno questo è assai tenue, e si suole trascurare.

45. Nè già sembrano a noi da seguitare quelli, i quali opinano, che l' acqua caschi dal riservatojo pel tubo a guisa d' un corpo solido, e urtando contro alle pareti della ca-

mera spinga innanzi l' ariete; perchè se ciò fosse, il moto diretto dell' ariete succederebbe quando la valvola si apre, e l' acqua cade, e non quando la valvola si chiude, e l' acqua è arrestata (14); di che può ciascuno assicurarsi sottoponendo a quella valvola la mano. Del resto è vero, che nell' ariete l' acqua si può per molti riguardi paragonare ad un corpo solido, perchè come un corpo solido cade essa, e cadendo si accelera, e arrestata opera in ragione di momento (40), e dentro ai tubi si avanza, e retrocede, onde ancora nel suo moto imita l' ariete militare, e senza sensibile differenza di tempo si chiude la valvola, e in tutta la lunghezza dei tubi l' acqua sembra fermarsi, e sorte dai fori posti in diversi luoghi ec., ma quel paragone non si può fare in tutti i riguardi, perchè allora non si potrebbe avere la pressione laterale, che chiude la valvola, apre le valvolette, produce li getti ec., e la inesattezza de' risultati riuscirebbe molto maggiore, se calcolando il moto dell' acqua, si trascurassero le condizioni dipendenti dalla fluidità.

46. Mentre l' acqua retrocede, si move quasi come per un tubo libero, e perciò lateralmente esercita una tenue pressione (33), e l' efflusso pei fori laterali si rallenta moltissimo, o vien meno (26, 25, 2); similmente nella camera allora l' acqua si diminuisce, perchè una porzione retrocede pel tubo, e la pressione si indebolisce fino a corrispondere all' altezza, che quell' acqua ha non fino al livello del riservatojo, ma nella camera stessa, poichè l' acqua, che retrocede pel tubo, non può contro l' altra che rimane nella camera, esercitare pressione di sorte alcuna; e in fatti se fosse altrimenti, il getto pel foro *t* non potrebbe dopo il chiudimento della valvola tosto cessare (37).

47. Quando adunque la pressione dell' acqua della camera è divenuta minore dell' altra, che risulta dal peso delle valvolette H, H', e dalla pressione che soffrono dall' acqua della campana, queste cominciano a cadere, e diminuendosi sempre più quella pressione, con moto accelerato si

chiudono, e cessa ogni passaggio di acqua dalla camera nella campana. Quando poi la pressione dell' acqua della camera insieme al peso della valvola MG è divenuta minore della forza della molla I, questa comincia a portare quella valvola in sù, e con moto accelerato la apre, imperocchè nella costruzione dell' ariete l' altezza della camera con i pesi delle valvole, e la forza della molla si debbono così disporre, che possano prestarsi a que' movimenti; quindi si vede che a spiegare questo aprimento della valvola, che si può dire spontaneo, ed è diverso dall' altro che si eseguisce ad arte (11), non basta dire come fa il *Montucla* (hist. des Math. V. III.), che si estingue la forza viva, per cui era stata chiusa, ma conviene provare che manca ogni altra pressione, che basterebbe a tenerla chiusa; perchè altrimenti potrebbe parere che cessando la forza viva, l' ariete dovesse riguardarsi come ridotto allo stato in cui era da principio, quando la sola pressione dell' acqua vinceva la forza della molla (31).

48. Il moto retrogrado nell' acqua cessa, quando tutta è estinta la reazione degli strati eguale al momento, con cui ciascuno era stato premuto (39). Allora l' acqua ricomincia a cadere, e sgorgando dalla valvola che trova aperta, acquista un certo momento; ma siccome quella valvola non presenta uno sfogo intieramente libero (34), così l' acqua con la pressione, che esercita in ragione dell' impedimento che soffre, comincia a chiuderla; e poichè quella pressione in seguito cresce in ragione di quel momento che va perdendo, così l' acqua con moto accelerato chiude quella valvola; e in somigliante modo ancora apre le valvolette, e in parte passa dalla camera nella campana, e in parte ripiglia il moto retrogrado, e spinge inanzi l' ariete, e lascia poi che le valvolette si chiudano, e la valvola del fondo si apra; e così seguitano gli esposti fenomeni del giuoco dell' ariete, nel quale è manifesto che tra due colpi della valvola, o trà due getti intermittenti successivi dovrà passare il tempo ba-

bastante per compiere quella specie di ondulazione, in cui l' acqua cadendo acquista un certo momento, e poi retrocedendo lo perde; laonde quel tempo sarà più breve, e i colpi della valvola saranno più frequenti, dove quel momento è minore, cioè accorciando il tubo dentro un certo limite (40).

49. Affinchè l' acqua cadendo possa acquistare il massimo momento, d' uopo è che passi una certa proporzione tra l' altezza dell' acqua nel riservatojo, e le dimensioni dei tubi, l' apertura della valvola, e la forza della molla; imperocchè per esempio noi abbiamo provato, che diminuendo oltre alla metà l'apertura della valvola, il getto si diminuiva, e avendola ridotta ad una fessura di due linee in larghezza, il giuoco dell'ariete cessò intieramente; e negli stromenti di paragone, quando chiudevamo l' apertura inferiore troppo presto, cosicchè non lasciavasi all' acqua il tempo necessario per retrocedere, e acquistare il primiero momento, abbiamo osservato che il getto si teneva più basso.

50. Forse da qualche particolare condizione di quelle proporzioni accade, che alcune volte si veda l'ariete mettersi in giuoco da se, ossia che senza tener chiusa la valvola inferiore (10), aprendo la comunicazione col riservatojo si veda chiudersi quella valvola da se, e poi aprirsi seguitando così alternativamente; imperocchè questo deve realmente accadere ogni volta, che la pressione proveniente dalla prima acqua arrestata, che produce lo slancio delle prime goccie (42), basti ad abbassare e chiudere quella valvola. All' opposto forse da qualche difetto in quelle proporzioni accade alcune volte, che il giuoco dell' ariete si fermi da se, senza che ne appaja ragione alcuna particolare; il che nella nostra macchina accadeva pur troppo di spesso, e la rendeva molto imperfetta. Ma forse a questo difetto contribuiva assai l'aria, che entrava per la valvola (15), o qualche altra analoga cagione, poichè abbiamo pure osservato, che se quella valvola pescava nell' acqua, quel difetto era molto minore.

51.

51. Ora dalla spiegazione data è chiaro, che il passaggio dell' acqua dalla camera nella campana è intermittente (13, 41, 46); quindi se questa è tutta ripiena d' acqua, ancora è intermittente il getto o il moto dell' acqua, che sorte da O (23); ma se la campana contiene dell' aria (13), o successivamente ne riceve qualche porzione (15), l' acqua che vi entra per le valvolette, impiega la propria pressione parte per spingere l' acqua nel tubo YZ, e parte nel comprimere quell' aria, la quale in seguito dilatandosi preme essa pure l' acqua rimasta nella campana, e ne spinge una porzione per quel tubo, ancora quando le valvolette sono chiuse. L' aria dunque nella campana dell' ariete fa l' ufficio stesso come nella così detta *Cassa d' aria* di molte trombe; poichè rende continuo il getto, o il moto dell'acqua, che sorte per O, ma ne lascia l' impeto intermittente (13), e lo rende anche minore di quello, che senza quell' aria si avrebbe.

52. Nell' ariete dunque il getto in brevissimo tempo si riduce a quello stato, che corrisponde all' impeto, con cui è premuta l' acqua dentro alla camera (40), o è spinta dentro alla campana (42), avuto riguardo agli ostacoli che deve superare per gli sfregamenti, per la resistenza dell' aria, e l' azione vicendevole delle parti; e si mantiene in quello stato, perchè quell' impeto e questi ostacoli rimangono costanti (39). Ma per riguardo all' uso di inalzar l' acqua applicando al foro O un tubo (4), pare che l'ariete non dovesse avere alcun limite, ma dovesse servire per portarla a quella altezza qualunque, a cui il tubo arrivasse; poichè pare, che la pressione dell' acqua della camera corrispondente all' impeto nominato di sopra operi a guisa di una percossa contro le valvolette, e ogni volta che il giuoco dell' ariete si ripete, debba sempre vincere la contraria pressione, che queste soffrono dal proprio peso, e dall' acqua della campana, e aprendole spingere una nuova porzione d' acqua nella campana, che maggiormente inalzi quella del tubo.

53. Nondimeno si avverta, che l' azione dell' acqua della

camera contro le valvolette è sempre costante (33); e all'opposto la pressione che quelle soffrono dall'acqua della campana, va sempre crescendo a misura che l' acqua si inalza nel tubo. Quindi le quantità d' acqua, che seguitando il giuoco dell' ariete passano nella campana, sono decrescenti; onde la somma loro, e perciò l' altezza dell' acqua nel tubo può avere un limite che il calcolo determinerà, oltre al quale non possa almeno sensibilmente dentro un certo tempo passare. Ma inoltre l' impeto dell' acqua che cade, non si impiega tutto nell'aprire le valvolette ma ancora nel comprimerle insieme a tutte le parti interne della macchina; e poi l' acqua che entra nella campana per le valvolette, quando sono aperte, in parte ne sorte quando quelle si abbassano e chiudono; e forse qualche parte ancora ne sorte mentre sono chiuse, perchè non si combaccino esattamente; quindi potrà forse accadere, che l' acqua nel tubo si accosti a quel limite ondeggiando, ma nemmeno vi possa arrivare o mantenervisi.

54. Per le due circostanze che abbiamo ultimamente indicate, noi siamo ancora entrati in sospetto, che se la pressione dell' acqua nella campana oltrepassi un certo segno, possa giuocando l'ariete, l'acqua da quella anzi cadere nella camera; e in fatti avendo dalla parte superiore empito di acqua un tubo lungo 32 piedi applicato al foro O, e messo in giuoco l' ariete sotto l' altezza d'acqua nel riservatojo di pollici 20, e col tubo di condotta lungo pollici 82, 5, abbiamo osservato che l' acqua invece di uscire dal foro superiore si abbassava nel tubo, e seguitava ad abbassarsi, quantunque nuova acqua si infondesse superiormente; onde fu manifesto non solo che nel nostro ariete, mentre giuocava, l' acqua passava dalla campana nella camera, ma inoltre che il limite a cui si poteva nel tubo inalzar l' acqua, non arrivava a piedi 32. E veramente avendone ridotta l'altezza a piedi 17 sortinne una piccola quantità d' acqua irregolarmente a getti rari, e a piedi 21 una quantità ancora mino-

re, e con più irregolare intermittenza per modo, che allora non si poteva più fare della macchina alcun uso vantaggioso.

55. Questo che si è detto dell' inalzamento dell' acqua in un tubo, vale pure per riguardo ad un altro uso, a cui si potrebbe l' ariete destinare, che è quello di comprimere l' aria nella campana; imperocchè egli è chiaro, che questa è sempre compressa in proporzione dell' altezza, a cui sale l' acqua sortendo da O; e se questo foro si tenga chiuso esattamente, tutto l' effetto dell' acqua che giuocando l' ariete entra nella campana, si ridurrebbe a comprimere quell' aria; il che si può riconoscere facilmente tenendo chiuso quel foro solo per qualche tempo; poichè aprendolo si vede il getto salire oltre all' altezza solita in proporzione della maggiore forza, con cui l'aria si rilascia dalla compressione sofferta. Pare dunque che ancora per la compressione dell' aria debba nell' ariete esservi un certo limite; il quale nell' ariete che serviva alle nostre esperienze, nemmeno arrivava a comprimerla fino ad una atmosfera oltre allo stato naturale.

56. Noi non abbiamo difficoltà di attribuire alle circostanze, e forse alle imperfezioni dell' ariete che adoperavamo, se gli effetti da noi ottenuti ebbero un limite così ristretto, poichè abbiamo inteso, che *Mongolfier* operando con una macchina molto più ferma con una caduta di 10 piedi, e con un tubo di condotta lungo 60 piedi e largo due pollici in diametro, ha potuto comprimere l'aria fino a 40 atmosfere; quindi abbiamo desiderato (3) di potere esperimentare altre macchine, e in altre circostanze per verificare le leggi dei fenomeni, che nella nostra macchina abbiamo osservate, e confrontarle con le teorie Idrauliche, dalle quali ci pare che dipendessero. Ad ogni modo noi non sapremmo dire, se nella macchina stessa di *Mongolfier*, quando l' aria era a quel segno compressa, aprendo il foro, l' acqua sarebbe con una velocità uniforme montata a piedi 1248, che equivalgono a 39. atmosfere,

siccome il *Montucla* sembra credere (hist. des Math. V. III.), poichè un tubo di tanta altezza, e della solidità bastante a vincere tanta pressione, non pare che potesse essere inalzato, e fermato ai muri della casa del *Mongolfier*, che esperimentava nel suo giardino; e un getto libero secondo le leggi abbastanza note non poteva salire ad un' altezza di 32. piedi per ciascuna delle 39. atmosfere.

57. Del resto se le idee da noi esposte sono giuste, egli è certo che la teoria dei fenomeni dell' ariete non sarà una delle meno composte e difficili dell' Idraulica, massimamente se vogliasi tener conto del tempo in cui quelli seguono, e delle resistenze che l' acqua soffre per gli sfregamenti, le piegature dei tubi, o altre cagioni. Ma lasciando ancora da parte ogni teoria a noi pare, che si possa facilmente determinare l' effetto dell' ariete; e paragonarlo con la forza che vi si impiega, o che si dovrebbe in qualche altra macchina impiegare per ottenere un effetto eguale; poichè prescindendo dalla distanza tra il riservatojo e l' ariete, a cui l' acqua si porta, e dall' acqua che riempie il riservatojo e il tubo di condotta, l' effetto dell' ariete è di portare ad una certa altezza quella sola quantità di acqua, che sorte dal foro O; e la forza che vi si impiega è quella, che si richiede per portare all' altezza del riservatojo tutta l' acqua, che gli si deve somministrare per mantenere in giuoco l'ariete, ossia tutta l' acqua che sorte dal foro O insieme, e dalla valvola; e poichè il tempo per ambedue è eguale, così quell' effetto come questa forza si potrà misurare col prodotto dell' acqua nell' altezza corrispondente.

58. Per esempio essendo l' altezza dell' acqua nel riservatojo di pollici 22 col tubo di condotta lungo pollici 119, e linee 2, dell' acqua che si somministrava, abbiamo raccolto 0, 038 col getto alto pollici 90, 5. L' effetto dunque era 38. 90, 5 = 3439, e la forza era 1000. 22 = 22000, cioè circa 6, 332 volte maggiore. Inoltre partendo dal calcolo del *Bossut* (hydr. §. 473), secondo il quale col solito

metodo dei sifoni un getto alto 5 piedi richiede l' altezza di 5 piedi, e 1 pollice nel riservatojo, e dalla teoria (ivi §. 459), che le differenze tra le altezze dei getti, e dei riservatoi siano prossimamente come i quadrati delle altezze dei getti, si troverà che per avere il getto di pollici 90, 5, si richiede l' altezza del riservatojo di pollici 92, 775, e perciò, prescindendo dall' acqua che riempie i tubi, si richiede la forza bastante per portare a questa altezza quei 0,038 di acqua, che sarebbe eguale a 3525, 45, che è circa 6, 241 volte minore dell' altra 1000, 22 richiesta per l' ariete.

59. In un altro esperimento sotto all' altezza di pollici 22 nel riservatojo col tubo di condotta lungo pollici 82, 5, e con un altro tubo applicato al foro O, che arrivava all' altezza di pollici 96, abbiamo raccolto 0, 091 dell' acqua, che si somministrava al riservatojo. Era dunque l' effetto 91. 96 = 8736, e la forza che si impiegava 1000, 22, che è circa 2, 518 volte maggiore. E fa d' uopo avvertire, che in questo esperimento una circostanza era singolarmente favorevole all' effetto dell' ariete, perchè l' acqua che somministravasi al riservatojo, non scorreva semplicemente come in quel primo esperimento, ma cadeva da un' altezza considerabile, la quale se fosse valutata nel calcolo, renderebbe la forza molto maggiore.

60. Se nel paragonare l' ariete con altre macchine volesse tenersi conto della distanza, a cui quello trasporta l'acqua, converrebbe in queste valutare la pendenza, che si dovrebbe dare al tubo di condotta per vincerne le resistenze. Così valutando questa pendenza, come alcuni fanno, al decimo della lunghezza, se per esempio gli 0, 091 di acqua del num. antecedente si portassero all' altezza e distanza medesima per mezzo di un sifone, come si dice a salto di gatto, al tubo di condotta lungo pollici 82, 5 dovrebbe darsi la pendenza di pollici 8, 25, e quei 0, 091 di acqua dovrebbero in realtà portarsi all' altezza di pollici 104, 25, e dovrebbe impiegarsi la forza 9436, 75, che essendo solo

2, 319

volte minore dell' altra 22000 richiesta per l' ariete, renderebbe lo svantaggio di questo un pò minore di quello, che si è trovato di sopra; il quale svantaggio, valutando quella pendenza al nono, o all'ottavo della lunghezza, e accrescendola ancora per ragione delle resistenze, che l' acqua potesse soffrire nelle braccia verticali del sifone, si diminuirebbe di più, ma sarebbe tuttavia soverchio.

61. Conviene dire, che analoghi a questi siano stati i risultati, che usando il modello presentato da *Mongolfier* ottennero li Commissarj dell' Instituto Nazionale di Parigi, che secondo il *Monitore* (14. Vendem. An. XI) gli decretarono il premio di una medaglia, perchè in quella macchina riconobbero l' utilità principale, e tutta propria di mettere a profitto le piccole correnti, sulle quali non si potrebbe stabilire una macchina più grandiosa, qual sarebbe una ruota a cassetta; onde sembrano avere conosciuto, che se le circostanze permettano, e massime il corpo d' acqua sia bastante, quella macchina o altra simile debba trovarsi più vantaggiosa dell' ariete, sebbene questo non avendo vetti, o ruote, o pignoni, sia di una preparazione affatto semplice; altronde si vede, che per ragione dei tubi, delle valvole, e della molla elastica quello non si può costruire facilmente che con piccole dimensioni, onde potrà essere messo, e mantenuto in azione ancora dalle piccole correnti.

62. L' ariete dunque avrà un uso più vantaggioso nei luoghi, dove scorrono limpidi e frequenti i rigagnoli con molta caduta, e l' acqua che sortirebbe dalla valvola, si può ancora utilmente impiegare, e non sono di molta estensione i terreni che abbisognano d' irrigazione, siccome sono i luoghi montuosi. In ciascun caso particolare non sarà difficile di trovare il modo per procurare il moto, e la caduta dell' acqua che richiede l' ariete; ma soventi basterà collocare il tubo stesso di condotta in modo, che l' acqua corrente vi possa entrare con impeto; poichè sopra l' estremità di un canale inclinato all' orizzonte per gradi 7, 5, a

cui l' acqua era fornita da una tromba ordinaria, noi abbiamo collocato un tubo lungo piedi 7, che aveva annesso l' ariete, che sporgeva in fuori del canale, e abbiamo osservato che l' acqua entrando in quel tubo lo manteneva in giuoco.

63. In questi casi però conviene determinare la lunghezza di quel tubo, perchè se prendasi troppo corto, l' effetto non succede, o è troppo debole; e per risparmio di spesa si può usando l' ariete semplice, (21) costruire la camera e il suo coperchio di qualche pietra facile a lavorarsi, e fare i tubi di legno, riservando il metallo per la campana, le valvole, e le altre parti, che servono al loro giuoco, o al legamento dei tubi con la camera; ma si dovrà la maggior diligenza usare nell' adattamento delle molle, perchè ancora dopo di averla usata grandissima, si vedrà non di raro l' ariete arrestato non solo per gli impedimenti, che alle molle cagionano i corpi estranei portati dall' acqua, ma ancora per le variazioni che quelle soffrono, senza che si possa bene conoscerne la cagione.

64. Ma l' effetto dell' ariete non si potrebbe ancora accrescere per ritrarne un vantaggio, che s' accostasse di più alla forza, che vi si impiega? Siccome al tempo stesso l' acqua sorte dal foro O, e da ogn' altro foro aperto sul tubo di condotta, e ancora da questo sale oltre al livello del riservatojo (27), perchè non si potrebbe allo stesso tempo raccogliere l' acqua, che sorte da più fori? E questa sicuramente avrebbe una maggior proporzione a tutta l' acqua, che si somministra al recipiente; perchè l' acqua che esce dagli altri fori oltre del principale O, non influisce sopra di quella, che va perduta sortendo dalla valvola.

65. Inoltre invece di frenare, come si suole, il moto diretto e retrogrado, in cui l' ariete si trova continuamente (14), perchè non si potrebbe riguardarlo come un' altra potenza, e metterlo a profitto? Noi in fatti per rendere quel moto più libero ed efficace, abbiamo reso snodato il tubo

verticale *i g* (fig. 10.) connettendo la porzione *c c' d' f* con l' altra *g e f* per mezzo di un tubo di quojo *c d f e* molto flessibile, e abbiamo tenuto il tubo di condotta D*m* sospeso con fili applicati a diversi punti; e avremmo anche potuto appoggiarlo sopra i rotoli, o cilindri *i i* mobili intorno al loro asse. In tale disposizione l' ariete ad ogni colpo percorreva uno spazio di un quarto di pollice, onde poteva servire per ottenere un altro effetto, che a quel moto corrispondesse. Per vederne l' esito lo abbiamo applicato allo stantuffo di una tromba idraulica nel seguente modo.

66. L' ariete è segnato dalle lettere F*c d m* B A con un tubo di condotta *e g* almeno di 7 piedi; nella direzione dell' asse di questo tubo è fissato sull' estremo della camera un tirante di ferro *o p*, al quale è unito il manico M*p* dello stantuffo, che pel moto dell' ariete deve moversi orizzontalmente nel corpo di tromba ZPO*n'*; ed a questo è annessa una piccola tromba ordinaria, in cui I*t* è la valvola di aspirazione e LV la valvola di elevazione, alla quale è applicato il tubo VX, per cui ascender dee l' acqua, quando essendone piene le canne, lo stantuffo è premuto fino in ZS. Il tubo d' aspirazione *y t* discende verso il fondo della cassa Q*x*R'R, che riceve l' acqua *y y'*, che esce dalla valvola che ha lo stelo K, quando è aperta. Lo stantuffo è disegnato in quella posizione che ha, quando per il colpo dell' ariete si è avanzato, e alloraquando questo torna in dietro, lo stantuffo giunge da MN alla posizione *m' n'*; onde si apre la valvola V rimanendo chiusa l' altra *x*; Aprendosi la valvola V ascende l' acqua, che entra nel corpo ZSOP; e sopravenendo il colpo dell' ariete, questo spinge lo stantuffo, per l' azione del quale chiudesi la valvola V, e viene spinta l' acqua nel tubo d' ascensione VX.

67. Per avvantaggiare maggiormente della potenza gioverà il fare lo stantuffo a regoli, quale già fu proposto dal P. Pini per la macchina da lui chiamata *Pantaulo*; giacchè in questo la resistenza degli sfregamenti è quasi nulla, e d' al-

d'altronde viene chiuso il passaggio all' acqua; ond'è, che un simile ripiego è stato pure adattato dall' ingegnoso *Cartwrigt* nei miglioramenti da lui fatti alla macchina a fuoco (Journ. des arts An. X.). Così nello stesso ariete abbinato, ossia aumentato di una piccola tromba, si può avvantaggiare dell' acqua che va perduta uscendo per la valvola yy', e alzarne un' altra porzione, che sarà bene considerabile, poichè nei nostri esperimenti la sezione del corpo della piccola tromba era di 1 pollice quadrato, ed essendo il moto dello stantuffo come quello dell' ariete di un quarto di pollice, perciò l' acqua da esso elevata ad ogni colpo è di un quarto di pollice cubico. Se dunque i colpi dell' ariete per una media siano 60 per ogni minuto, in questo tempo si avrà l' elevazione di 15 pollici cubici d' acqua, che sicuramente darebbero un notabile accrescimento all' effetto dell' ariete.

68. Finalmente quando si voglia costruire l' ariete, converrà adattare la solidità delle sue parti, e massimamente dei tubi e della camera in modo, che possano reggere alla forza, da cui sono distratte, e che come insegna il *Bossut* (hydr. part. 1. ch. 1.) risulta dalla pressione, che soffrono corrispondentemente al momento, o all' impeto (40) che esercita l' acqua, che era in moto, quando viene arrestata chiudendosi la valvola; laonde si troverebbe ingannato, chi a quel fine si valesse delle tavole, che si trovano presso diversi Autori, e che sono calcolate per due casi dell' acqua stagnante, e dell' acqua in moto.

Ma questa riflessione non deve ancora applicarsi a tutte le trombe, fontane, e altre macchine, nelle quali l' acqua alternativamente si move, e viene arrestata, e a quelle ancora, nelle quali l' acqua è messa in moto da qualche potenza che la spiega? E veramente per la ragione arrecata (40) è manifesto, che in tutte le macchine, quando l' acqua è arrestata, ciascun strato deve soffrire, e contro i lati esercitare una pressione corrispondente all' impeto, o momento di quella, che lo inseguiva. Nelle macchine poi, dove l' acqua è spinta da qualche potenza per esempio da un pistone, siccome il moto non può in un istante comunicarsi da una all' altra sua estremità, ma successivamente si comunica da uno strato all' altro, così è chiaro che la potenza operando tutta immediatamente sul primo strato determina in questo una pressione corrispondente a se medesima, e che per ragione della fluidità quello strato esercita pure un' eguale pressione lateralmente; solo dovrebbero eccettuarsi i casi della massima velocità, che impedisce l' azione laterale, come quando la palla trapassa la banderuola senza agitarla.

70. Il *Bossut* (hydr. II. part. ch. VI. sect. II.) avverte che i pratici sogliono tenere le grossezze dei tubi più forti di quel, che esiga la teoria da lui data, dove considera la pressione dell' acqua in moto; e poteva anche aggiugnere, che nondimeno quelli troppo soventi si rompono. Tra le ragioni però che egli indica, non si trova quella che a noi pare principalissima, e che nasce dalla pressione molto maggiore, che quei tubi debbono soffrire ogni volta, che l' acqua mossa viene arrestata, o che l' acqua quieta viene messa in moto da qualche potenza; e noi non dubitiamo che facendo attenzione si troverà, che le rotture dei tubi seguono generalmente in queste circostanze. Ma basti l' avere indicate queste cose che per isvolgerle richiederebbero un lungo trattato.

DICHIARAZIONE DELLE FIGURE.

fig. 1. Sezione verticale pel mezzo dell' ariete Idraulico.

NXRRS camera, che termina in un tubo RR, il quale si unisce con altri tubi R R'D'D'DD E FG; essa è fatta di ottone.

ESF Valvola, che si apre per mezzo di una leggiera molla I rinchiusa nel tubetto *edcf* attaccato al fondo STR; e che si chiude tirandola in giù colla mano applicata al punto M.

ST apertura sotto la valvola.

L*rr*LZ campana, che può essere o di rame, o anche di vetro, ed è connessa colla sottoposta camera.

LL fondo della campana, o diafragma, in cui sono i fori *r*, *r* di due valvolette H, H', che si chiudono pel proprio peso, e che si aprono dall' azione dell' acqua, che è nella sottoposta camera.

YZO tubo annesso al diafragma, nel quale è un foro *y* praticato in vicinanza del diafragma stesso, ed il quale ha uscita nel punto O.

KOKZ testa della campana fatta a vite nel contorno KK per applicarvi il cappelletto (fig. 2) K'VK', in cui è un foro più piccolo V per formar un getto più elevato.

fig. 3. Piantato del fondo AB*ef*G della camera (fig. 1), il quale vi è applicato a vite.

A'DB'C, circolo col bordo dentato.

E'G'F'G' valvola.

*sa*T*m* apertura della valvola, in cui passano due traverse ST, *am*, nel mezzo delle quali è applicato il tubo *nn'* corrispondente al tubo *edcf* (fig. 1).

fig. 4. Tubo, che si connete con altri, di lunghezza indeterminata.

fig. 5. Vasca KLIH, al cui fondo è applicato il tubo *dd*, al quale si connettono gli altri tubi coll' ariete della fig. 1.

fig. 6. Abbozzo di un ariete.

fig. 7. Schizzo dell' ariete Idraulico colla valvola applicata non al disotto, ma a fianco della campana.

NC Camera,

BB' Valvolette,

A Valvola,

PO Tubo a cui si applicano i tubi corrispondenti alla vasca.

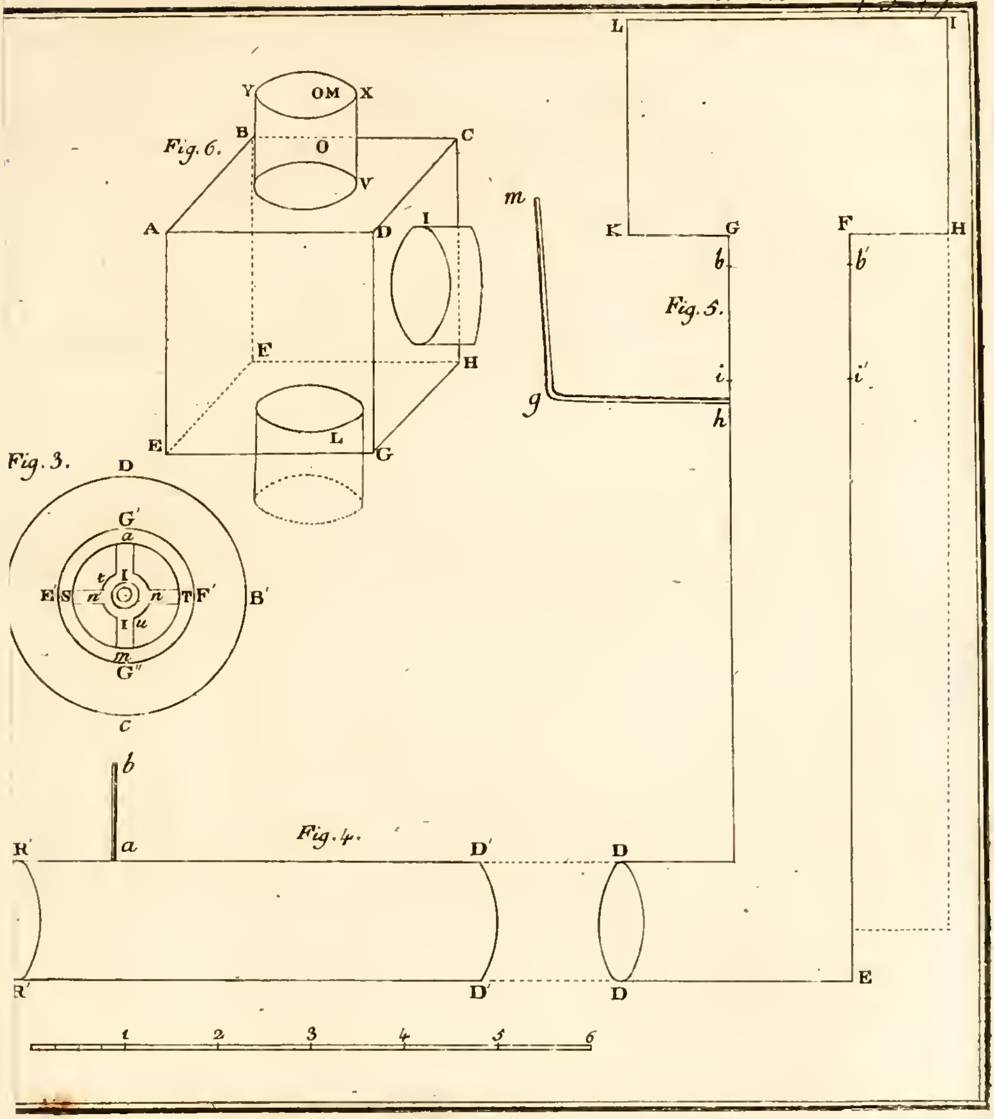


Fig. 6.

Fig. 5.

Fig. 3.

Fig. 4.

Y
OM
X
B
O
C
V
A
D
I
E
H
F
L
E
G
m
g
h
L
I
K
G
b
i
F
H
b′
i′
D
G′
a
t
I
E′
S
n′
n
T
F′
B′
I
u
m
G″
C
b
R′
a
D′
D
R′
D′
D
E
1
2
3
4
5
6

Memoria di Carlo Amoretti pag. 686.

Tav. XVIII.

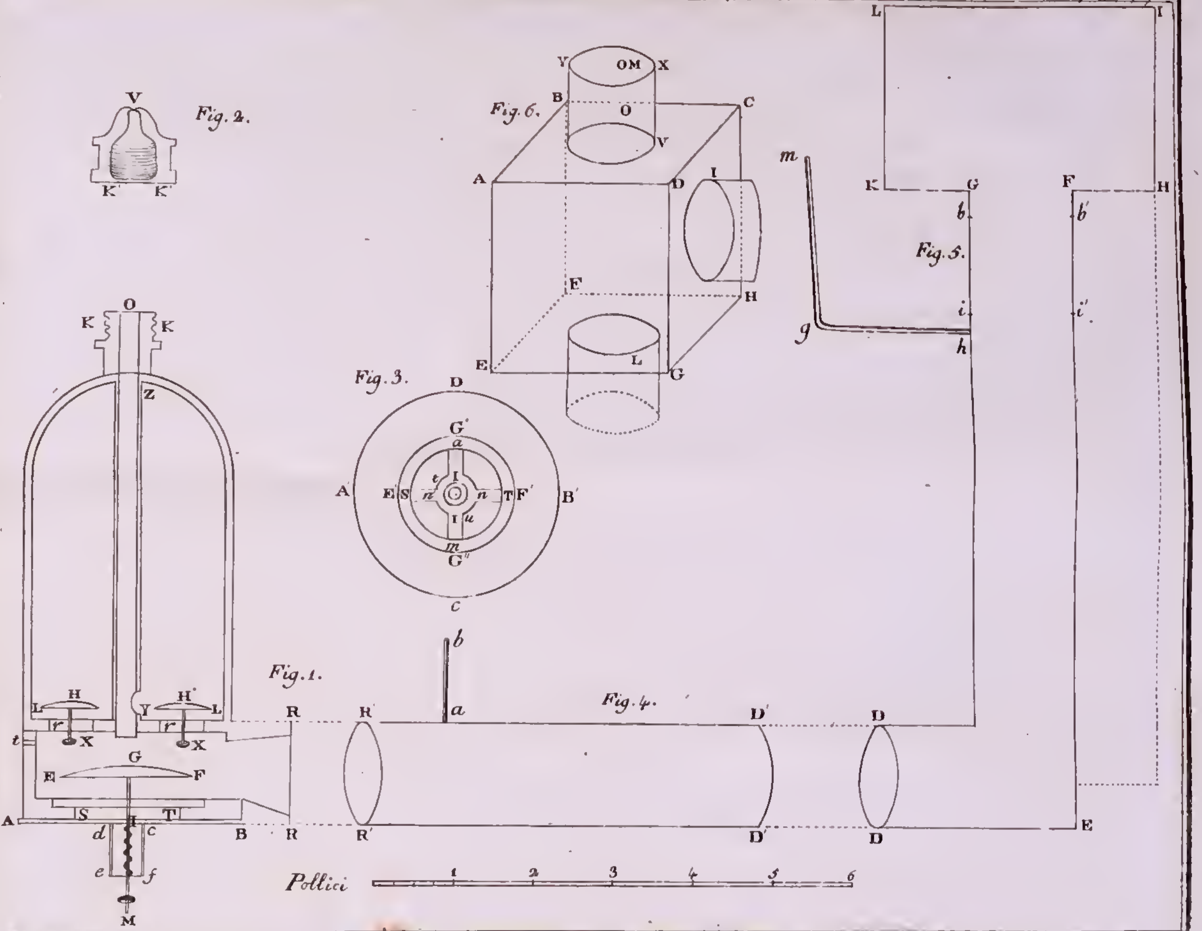


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
V
K'
K'
O
K
K
Z
H
H'
L
L
Y
r
r
X
X
t
G
E
F
S
T
A
B
d
c
e
f
M
R
R
R'
R'
a
b
D'
D'
D
D
D
C
A'
B'
E
S
T
F'
G'
G''
a
m
t
I
I
n'
n
u
Y
OM
X
O
B
C
V
A
D
I
E
H
E
G
L
m
g
h
L
I
K
G
F
H
b
b'
i
i'
E
Pollici
1
2
3
4
5
6

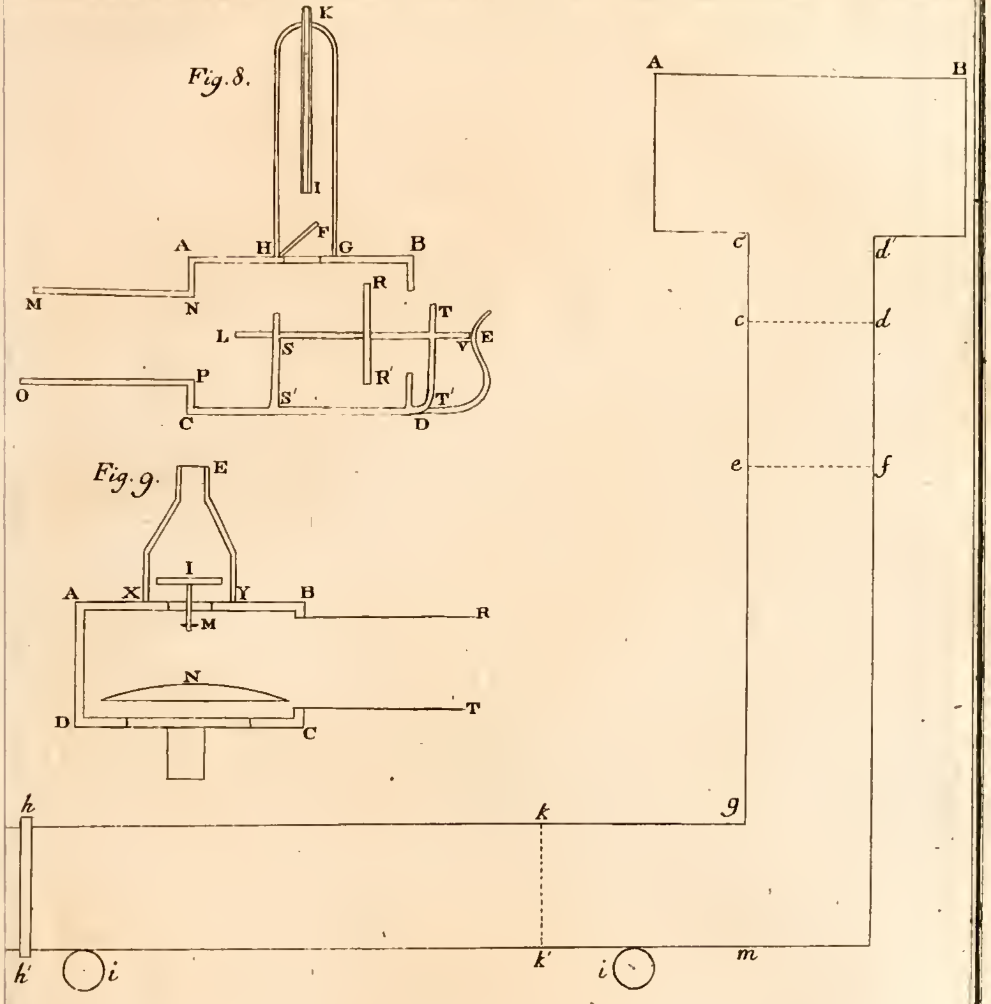


Fig. 8.
K
I
F
A
H
G
B
M
N
R
T
L
S
Y
E
R'
O
P
S'
T'
C
D
Fig. 9.
E
I
A
X
Y
B
M
R
N
T
D
C
A
B
c'
d'
c
d
e
f
g
h
k
h'
k'
i
i
m

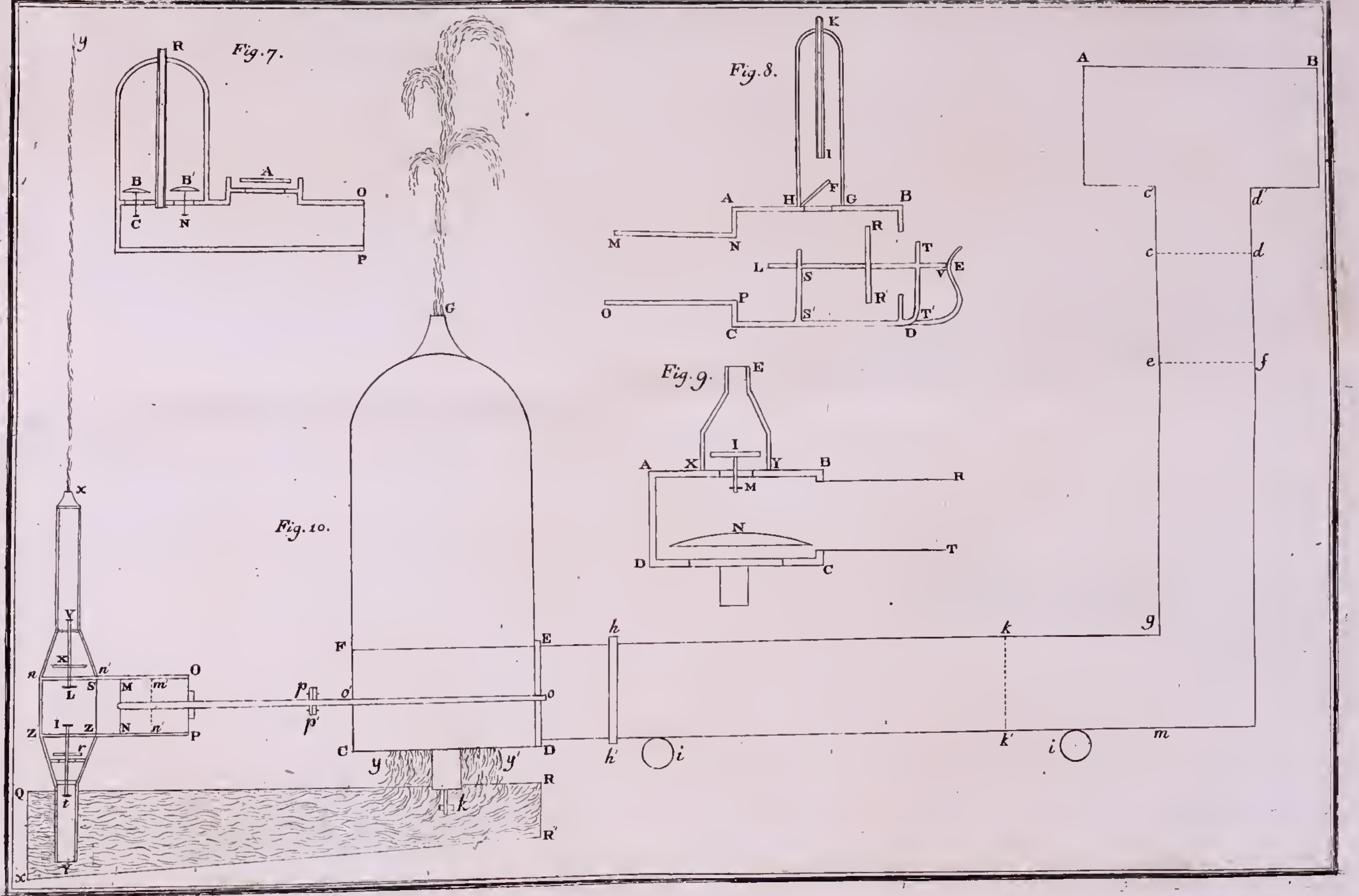


Fig. 7.
R
A
B
B'
O
C
N
P
Fig. 8.
K
I
F
A
H
G
B
M
N
R
T
L
S
E
V
R'
P
S'
T'
O
C
D
Fig. 9.
E
I
A
X
Y
B
R
M
N
T
D
C
Fig. 10.
y
x
G
A
B
c'
d'
c
d
e
f
V
X
n
n'
S
M
m'
O
L
p
o'
o
F
E
h
k
g
I
Z
z
N
n'
P
p'
r
C
D
y
y'
h'
i
k'
i
m
Q
R
t
k
R'
Y
x

OPPOSIZIONE D' URANO

OSSERVATA NEL 1794

Da Giuseppe Slop de Cadenberg

Ricevuta il dì 23 *Giugno* 1803.

Il cielo costantemente coperto di nuvoli non lasciò vedere il pianeta che sei giorni dopo seguita l' opposizione. Noi l' osservammo al Quadrante murale insieme con le stelle π e ρ del Leone i giorni 20 e 24 Febbrajo. Nei calcoli di quest' opposizione ci siamo serviti dei luoghi apparenti di dette stelle dedotti dal Catalogo del Bradley, i quali si trovano quì descritti per il dì 24 dello stesso mese.

Dal Catalogo delle stelle zodiacali di Mayer

π del Leone,	Ascensione retta . . .	4.′ 27.° 20.′ 0″, 2
	Declinazione Boreale	0. 9. 1.24, 0
2 ρ del Leone,	Ascensione retta . . .	5. 5.29.36, 4
	Declinazione Boreale . . .	0. 10.21.34, 3

Dal Catalogo del Bradley

π del Leone,	Ascensione retta . . .	4. 27.20. 4, 2
	Declinazione Boreale . . .	0. 9. 1.26, 8
ρ del Leone,	Ascensione retta	5. 5.29.38, 2
	Declinazione Boreale . . .	0. 10.21.34, 1

Dal Catalogo di La Caille delle stelle zodiacali

π del Leone,	Ascensione retta	4. 27.20. 2, 5
	Declinazione Boreale . . .	0. 9. 1.29, 1
ρ del Leone,	Ascensione retta	5. 5.29.35, 1
	Declinazione Boreale . . .	0. 10.21.43, 0

Il dì 20 Febbrajo tempo medio ore 11. 50.' 20.''

Differenza osservata fra Urano e π del Leone

In Ascensione retta	+	0.' 1.°20.'32'',4
In declinazione	+	0. 4. 31. 8, 3
L' istessa corretta dalla refrazione . .	+	0. 4. 31. 14, 9

Luoghi apparenti d' Urano

Ascensione retta		4. 28. 40. 36, 4
Declinazione Boreale		0. 13. 32. 41, 8
Longitudine		4. 26. 9. 24, 5
Latitudine Boreale		0. 0. 46. 46, 7
Aberrazione in Longitudine	—	0. 0. 0. 15, 1
Nutazione in Longitudine	+	0. 0. 0. 9, 3
Longitudine vera d' Urano		4. 26. 9. 18, 7
Long. geoc. presa dalle Tav. del Ch. Lambre		4. 26. 9 26, 9
Latitudine geocentrica Boreale		0. 0. 46. 55, 1
Errore delle stesse tavole nella Longitudine	+	0. 0. 0. 8, 2
Errore nella Latitudine	+	0. 0. 0. 8, 4

Il dì 24 Feb. tempo medio ore 11. 32.' 41''

Differenza osservata fra Urano e ρ del Leone .

In Ascension retta	—	0. 6. 58. 59, 1
In Declinazione	+	0. 3. 14. 38, 3
L' istessa corretta dalla rifrazione . .	+	0. 3. 14. 43, 1

Luoghi apparenti d' Urano

Ascensione retta		4. 28. 30. 39, 1
Declinazione Boreale		0. 13. 36. 17, 2
Longitudine		4. 25. 59. 5, 5
Latitudine Boreale		0. 0. 46. 52, 0
Aberrazione in Longitudine	—	0. 0. 0. 15, 0
Nutazione in Longitudine	+	0. 0. 0. 9, 4
Longitudine vera d' Urano		4. 25. 58. 59, 9
Long. geoc. ricavata dalle Tav. del Ch. Lambre		4. 25. 59. 11, 8
Latitudine geocentrica Boreale		0. 0. 46. 54, 3
Errore delle Tavole nella Longitudine .	+	0. 0. 0. 11, 9
Errore nella Latitudine	+	0. 0. 0. 2, 3

L' errore medio delle tavole si trova dunque nella longigitudine + 10″, 0, e nella latitudine + 5″, 3, quali errori si avranno nell' osservazione del dì 20. Febbrajo assumendo la longitudine osservata in quel giorno 4.′ 26.° 9.′ 22″, 7, e la latitudine boreale 46.′ 49″, 9. La longitudine del Sole si ha dalle Tavole del Ch. Lambre per il tempo di quell' osservazione 11.′ 2.° 36.′ 33″, 1, onde in quel tempo col moto relativo d' Urano dal Sole era stato già descritto un arco di 6.° 27.′ 10″, 4 dopo l' opposizione.

Quest' arco secondo il moto del sole di 6.° 12.′ 15.″, 7, e quello d' Urano di 16.′ 14″, 5 dedotti dalle Tavole del Ch. Lambre fra il 20. Febbrajo 11.$^{\text{or.}}$ 50.′ 20″, e il 14. dell' istesso mese ore 8. 0.′ 8″ di tempo medio, doveva descriversi in giorni 6, ore 3. 19.′ 50″, onde l' opposizione apparente d'Urano seguì il dì 14 Febbrajo tempo medio a ore 8. 30.′ 30.″ La longitudine del Sole per questo tempo si ha dalle Tavole 10.′ 26.° 25.′ 33″, 9, onde la longitudine geocentrica apparente d' Urano era di 4.′ 26.° 25.′ 33″, 9, e facendo uso dell' equazioni (1) — 5″, 7 . . . . . (2) + 1″, 1, la longitudine eliocentrica vera 4.′ 26.° 25.′ 29″, 3.

La latitudine geocentrica osservata si deduce per l'istesso tempo dell' opposizione 46.′ 48″, 7, alla qual corrisponde la latitudine eliocentrica boreale 44.′ 17″, 4.

Dalle Tavole del Ch. Lambre si ha per il momento dell'opposizione la longitudine eliocentrica d' Urano 4.′ 26.° 25.′ 37″, 7, e la latitudine boreale 44.′ 17″, 4, perciò gli errori di quelle tavole erano nella longitudine eliocentrica + 8″, 4, e nella latitudine + 5″, 6.

---

(1) Observationes syderum habitæ Pisis ab an. 1774. ad an. 1778. p. 122.

(2) Novi Planetæ observationes et theoria pag. 16. et 17.

LETTERA

Di Anton Maria Vassalli-Eandi

AL SOCIO STRANIERO GIOVANNI SENEBIER

Ricevuta il dì 1 Luglio 1803.

Amico Carissimo

Torino ai 5 Messifero anno XI.°
24 Giugno 1803.

I dotti rimproveri, dei quali vi compiaceste onorarmi nella vostra lettera dei 9 Fiorile scorso, di non occuparmi a stabilire una teoria della pila del Volta, della decomposizione dell'acqua, degli effetti del galvanismo sui corpi organici, ed inorganici, e dei suoi effetti chimici, non hanno altra causa, ché la folla delle occupazioni, le quali mi hanno impedito di scrivervi, che io già da gran tempo mi occupava di questi oggetti, e di pubblicare le mie idee, e le mie sperienze relative ai medesimi, dei quali ho però già dato varj articoli nel Giornale della 27^{ma} Divisione Militare. Mi manca pur oggi il tempo d' estendermi, e altronde le vostre importanti questioni sono tali, a non poter essere discusse in una lettera; mi restringerò dunque a pregarvi di scrivermi il vostro prezioso giudizio sulle basi delle soluzioni, e voi vedrete nel prossimo n.° 4 *de la Bibliotheque Italienne* nella notizia delle mie pubbliche sperienze galvaniche, che i lavori del Comitato Galvanico di Torino non sono affatto sconnessi.

Per ciò che riguarda la teoria della pila, io son costantemente d' avviso, che il calorico, l' elettricità, e il galvanismo (come ho già detto nelle mie *Experiences, et Observations sur le fluide de l'Electro-moteur de Volta*) siano il medesimo corpo sì diversamente modificato, che l' uno si distinstingue perfettamente dall' altro; mentre che essi conservano proprietà comuni. Questo fluido è sparso in tutti i corpi della natura in ragione della naturale loro capacità. I cangiamenti chimici, o 'l passaggio di una modificazione del fluido per un corpo, sono quelli che determinano le modificazioni del fluido naturale che vi è contenuto. L' ossidazione dei metalli, che fin dal principio di queste sperienze nell' anno 8.° dissi esser la causa del galvanismo, l' ossidazione dico dà all' accennato fluido generale la modificazione del galvanismo per via del cangiamento, che essa produce nella loro capacità. Questo cangiamento l' ho dimostrato per rapporto all' elettricità fin dal 1790 nel 5.° Volume dell' Accademia di Torino, e l' ho ultimamente verificato in varj metalli pesando le dosi necessarie di questi, e dei loro ossidi, per avere i medesimi gradi d' elettricità elettrometrica; e non solamente ho confermato, che i metalli danno elettricità positiva, e i loro ossidi la danno negativa; ma ancora che la differenza tra lo zinco p. e. ed il suo ossido è di tre quarti; e quella tra il rame, ed il suo ossido è di cinque sesti circa. Questa diversità nelle mutazioni di capacità è la causa dello sviluppo del fluido galvanico durante tutto il tempo della ossidazione dei metalli, ed il diverso grado di capacità nei diversi ossidi è la causa, che il fluido si ritrova più rarefatto in uno, che nell' altro estremo della pila. La maggiore, o minore diversità nella capacità dei metalli e dei loro ossidi, rende i primi più o meno proprj allo sviluppo del galvanismo.

Tutti i corpi, i quali cangiano di capacità, purchè siano ben disposti, sono proprj a formare apparecchj galvanici. La modificazione che il galvanismo produce sul fluido naturale dell'acqua, ne fa la decomposizione; quindi i due gaz, la formazione dell' acido nitrico, e dell' ammoniaca, quando l' atmosfera, o i corpi pei quali passa il galvanismo somministrano l' azoto; quindi la formazione dell' acido muriatico ossigenato, che dissolve l' oro, quando il galvanismo agisce sopra una dissoluzione di muriato d' ammoniaca; quindi la revivificazione, e l' ossidazione dei metalli per l' azione dell' idrogeno, e dell' ossigeno. Io ho dimostrato tutti questi effetti chimici, e varj altri analoghi nel corso pubblico delle Sperienze fisiche. Essi vanno benissimo d' accordo colla sovraesposta teoria, come pure la ricomposizione dell' acqua per via della combustione dei gaz, l' azione del galvanismo sull' aria atmosferica, e sopra i gaz &c. La tendenza del galvanismo a ricuperare ciò che gli manca, per essere fluido naturale; tendenza, per via della quale modifica il fluido naturale dei corpi, è la causa della sua azione sui corpi organici, ed inorganici, nei quali, esercitando le affinità, che gli sono proprie, dà luogo all' azione di molte altre, come ho dissopra indicato. Per via della modificazione del fluido naturale delle sensitive (*mimosae*) il galvanismo agisce sulle medesime. Dalla suddetta modificazione ne segue, che esso uccide i germi delle piante, quando è alquanto forte, e ne accelera il primiero sviluppo, ma poi in seguito loro nuoce, quando è assai debole. Nella stessa maniera agisce sulli animali, modificandone il loro fluido vitale; e quanto è utile in caso di accumulazione di eccitabilità, altrettanto è dannoso nelle affezioni steriche. Nel primo caso porta via la troppa vitalità, che opprime le forze; nel secondo diminuisce vieppiù la vitalità già di troppo indebolita. Quindi ne nascono i felici esiti ottenuti nell' applicazione del galvanismo a diverse malattie, come pure i mali cagionati dallo stesso fluido, mali che ho preveduto nel rapporto sull' uso di questo fluido in Medicina. Altrove ho annunziato il vantaggio, che possono trarre dal galvanismo le scienze, e le arti. Vi scriverò altra volta le mie sperienze sulli animali, sui vegetabili, e sui minerali, dalle quali ho tratti questi miei pensieri teorici. Sono colla più perfetta stima, considerazione, ed amicizia ec.

INDICE

Delle cose contenute in questo tomo.

PARTE I.

Statuto della Società Italiana delle Scienze. Pag. III.

Catalogo dei Socj. X.

Annali della Società medesima, continuati da POMPILIO POZZETTI. XV.

Catalogo delle opere di GIORDANO RICCATI per servire di appendice all'elogio di lui pubblicato nel tomo antecedente. XXVII.

Tavola degli Errori, e delle Correzioni. XXXIV.

Sull'esofago, sulle intestina e sopra alcune valvole del tubo alimentare, dissertazione di VINCENZO MALACARNE. pag. 1.

Sopra la cecità temporanea di un occhio, Memoria di JACOPO PENADA presentata da *Gianverardo Zeviani*. 61.

Considerazioni sopra l'estensione e i confini della legge di continuità tanto nella Meccanica generale quanto nell'animale, presentate da *Pompilio Pozzetti*, di MICHELE ARALDI. 75.

De' pronostici ragionati delle annate e delle stagioni, di GIUSEPPE MARIA GIOVENE. 108.

Esperienze ed Osservazioni sopra la direzione della Plumula e della Radicula nelle semenze che germogliano, presentate da *Pompilio Pozzetti*, di GIOACHINO CARRADORI. 138.

Sopra una doppia Iride a rovescio e in contatto, Memoria di VINCENZO CHIMINELLO. pag. 146.
Opposizioni di Marte osservate dal MEDESIMO. 150.
Congetture sull'azione del Mercurio vivo nel volvolo e sulla natura del sugo gastrico, di PIETRO MOSCATI. 153.
Sopra i denti fossili di un Elefante trovato nelle vicinanze di Roma, Memoria di CARLO LODOVICO MOROZZO. 162.
Sopra le pretese ossa d' animali terrestri silicee del Mont-Perdu negli alti Pirenei, Riflessioni di ALBERTO FORTIS. 172.
Principj di Statica per i tetti, per i ponti, e per le volte, di PAOLO DELANGES. 183.
Memoria sulla pretesa esistenza di alcuni quadrupedi detti Giumerri, o Giumarri, di LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI. 205.
Cura felice d'un Uomo morso da un cane certamente rabbioso, Memoria di GIANVERARDO ZEVIANI. 223
Memoria sopra un problema stereotomico, di GIANFRANCESCO MALFATTI. 235.
Brevi riflessioni alla critica del tentativo sul problema delle pressioni, fatta dal Sig. *Paoli* nel tomo IX di questa Società; del MEDESIMO. 245.
Sull' equazioni a differenze parziali, Memoria di PIETRO PAOLI. 249.
Riflessioni circa la Memoria intorno la salita delle macchine aereostatiche nell' aria di *Leonardo Eulero*, fatte da GIROLAMO SALADINI. 264.
Su la tensione delle funi, dilucidamenti teorici ed esperienze di PIETRO COSSALI. 285.
Ricerche sulla Quina, di GIOVANNI FABBRONI. 314.
Sopra i vermi pestilenziali de' Buoi, Memoria di GIANVERARDO ZEVIANI. 361.

PAR-

PARTE II.

Lettera di PIETRO ABBATI al Socio *Paolo Ruffini*, presentata da questo. pag. 385.

Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto, Memoria di PAOLO RUFFINI. 410.

Ricerche Chimico-economiche intorno alla seta, di GIANNANTONIO GIOBERT. pag. 471.

I Principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza, Ragionamento di PIETRO FERRONI. 481.

Sul preteso moderno ripristinamento del genere enarmonico de' Greci, Memoria di GIAMBATISTA DALL' OLIO, presentata da *Pompilio Pozzetti*. 634.

Memoria di ANTONIO LOMBARDI, presentata da *Pompilio Pozzetti*, sulla miglior forma da darsi ai ripari che si costruiscono ne' fiumi. 640.

Pensieri geometrici di PIETRO FERRONI. 649.

Osservazioni di CARLO AMORETTI sulle Anguille. 679.

Catalogo di Stelle Boreali; di ANTONIO CAGNOLI. 687.

Saggio sopra il Fluido Galvanico, di ANTONMARIA VASSALLI EANDI. 733.

Memoria sull' Ariete Idraulico, di ERMENEGILDO PINI e di GIUSEPPE MARIA RACAGNI. 766.

Opposizione d' Urano osservata nel 1794 da GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG. 799.

Lettera di ANTONMARIA VASSALLI-EANDI al Socio Straniero Giovanni Senebier. 802.

AVVISO AL LEGATORE.

La prima Parte termina alla pag. 384, la seconda comincia alla pag. 385, e a questa si deve premettere il frontespizio della seconda Parte.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY